

Aplicación de la integración de contorno para el cálculo del factor de visión entre dos superficies rectangulares arbitrarias

Contour integral application for view factor calculation between two arbitrary rectangular surfaces

Yanan Camaraza-Medina^{1,*}

¹Departamento de Ingeniería Mecánica. Universidad de Matanzas. Carretera a varadero km 3 ½. Matanzas, Cuba.

*Autor de correspondencia: yanan.camaraza@umcc.cu

Este documento posee una [licencia Creative Commons Reconocimiento/No Comercial 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Recibido: 4 noviembre 2022 **Aceptado:** 7 diciembre 2022 **Publicado:** 19 diciembre 2022

Resumen

El factor de visión es un punto clave en la radiación térmica entre superficies. En ingeniería es requerido computar el factor de visión entre geometrías complejas, las cuales incluyen varias superficies paralelas o inclinadas. En la actualidad no se dispone de una expresión de análisis simple para este propósito, por tanto es requerido usar las reglas de sumatorias y el álgebra de factores de forma (FF), pero cuando son analizadas geometrías complejas el manejo de las FF es extremadamente laborioso. Por lo tanto, este trabajo pretende desarrollar una ecuación para el cálculo del factor de visión en la transferencia de calor por radiación de dos superficies rectangulares arbitrarias paralelas o inclinadas, por medio de las facilidades proporcionados por el cálculo vectorial. Las soluciones exactas obtenidas fueron comparadas con los valores calculados mediante FF usando las soluciones de Hottel y Hamilton-Morgan, y con los resultados computados mediante la integración numérica de la cuádruple integral usando la regla de Simpson 1/3 con cinco intervalos. La ausencia de similares precedentes en la literatura técnica refuerza el carácter práctico y científico del método de análisis propuesto.

Palabras clave: factor de visión, superficies rectangulares, integración de contorno

Abstract

View factor calculation is a key point in the radiation heat transfer between surfaces. In engineering it is required to compute the view factor between complex geometries, which include various perpendicular and inclined surfaces. Currently there are no analytical expressions available for this purpose, so the use of summation and reciprocity rules (SR) is required, but when complex geometries are analyzed, handling SR is extremely laborious. Therefore, this work aims to develop an equation for the view factor calculation in radiative heat transfer of two arbitrary inclined or parallel rectangular surfaces, by means of the benefits provided by vector calculus. The exact solutions obtained with contour integration were compared with the values calculated from algebra factor (AF) using the Hottel's and Hamilton-Morgan's solution and with the results computed from the numerical integration of the quadruple integral using Simpson's rule 1/3 with five intervals. The lack of similar precedents in the technical literature reinforces the practical and scientific nature of the proposed method of analysis.

Keywords: view factor, rectangular surfaces, contour integration

1. Introducción

En muchas aplicaciones de ingeniería se requiere determinar la transferencia de calor por radiación entre superficies. El factor de visión establece la relación geométrica entre la superficie emisora y receptora, permitiendo determinar la cantidad de energía emitida por una superficie y captada por otra. En la literatura especializada han sido presentadas diversas soluciones analíticas para la determinación de los factores de visión entre diversas configuraciones geométricas [1-3].

Son conocidos diversos métodos para la determinación de los factores de visión, entre ellos destacan el método visual, gráfico, analítico y otras combinaciones que aprovechan las bondades de los métodos analítico y numérico. En muchos casos el factor de visión puede ser computado mediante el uso del álgebra de factores de forma, derivado de relaciones conocidas para factores de visión de geometrías más simples [4-7]. Una extensa compilación que agrupa un total de 315 factores de visión para diversas geometrías es dado por Howell [8].

La obtención del factor de visión entre dos superficies rectangulares ubicadas en planos paralelos o inclinados con un borde común, ha sido objeto de estudio durante décadas. La totalidad de las soluciones propuestas se basan en la suma de series infinitas, mediante las cuales se resuelve la integral cuádruple que describe el proceso. Para el intercambio radiante entre superficies rectangulares en planos perpendiculares, Gross et al. [9] y Ehlert et al. [10] proporcionaron las primeras relaciones. Estos autores consideraron que los contornos de las superficies son en todo momento perpendiculares o paralelos a los ejes x y ξ (véase la Fig.1), lo cual simplifica apreciablemente el análisis en la suma de series infinitas. Sin embargo, esta solución falla cuando ambos rectángulos comparten un lado común, siendo requerido en estos casos el uso del álgebra de factores de forma, lo cual dificulta su implementación mediante métodos computacionales.

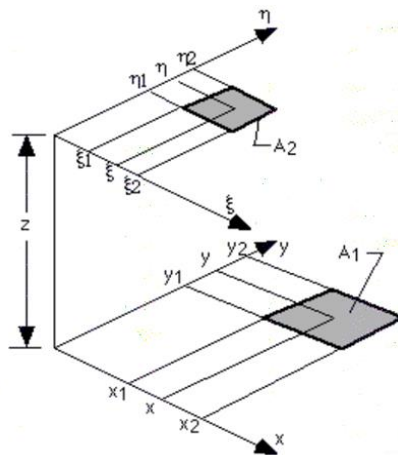


Fig.1 Proyección de planos paralelos

Una solución mejorada es dada posteriormente por Krishnaprakas [11]. Este nuevo método permite la obtención del factor de visión entre las superficies 1 y 2, siempre que el espacio entre los planos 1 y 2 se intercepten en sentido normal o axial, igualmente se considera que todos los planos y bordes son paralelos o perpendiculares, por tal motivo, cuando se comparten bordes comunes la solución de las series igualmente divergen. Hottel [12] propuso una solución analítica para la determinación del factor de visión entre dos superficies rectangulares arbitrarias en planos paralelos, la cual fue mejorada por Boeke and Wall [13] y posteriormente por Hsu [14]. La solución analítica ahora si permitía la inclusión de bordes comunes a ambos planos, pero con la limitación que uno de los lados de las superficies emisoras y receptoras debe ser coincidente con los ejes x o y , por tanto no puede ser utilizada para superficies desplazadas con respecto a los ejes coordenados.

El factor de visión para dos superficies arbitrarias ubicadas en planos perpendiculares o coincidentes (véase la Fig.2) también fue ampliamente estudiada por Hamilton-Morgan [15], los cuales presentaron una relación combinatoria extremadamente compleja para la solución de la cuádruple integral, la cual requiere del uso de la regla de Simpson 1/3 para la proyección del último núcleo integral. Estos autores calcularon y tabularon posteriormente la solución numérica para diversas combinaciones de geometrías para $\theta = (30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 90^\circ; 120^\circ; 135^\circ; 150^\circ)$.

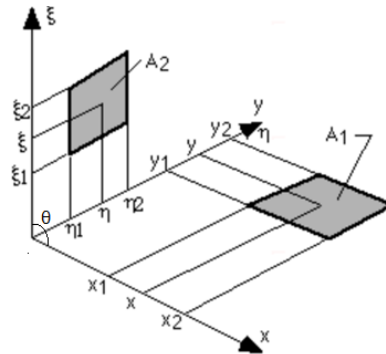


Fig.2 Proyección de planos inclinados

Recientemente han sido presentados diversos métodos para la estimación de los factores de visión, derivados de las soluciones de Hottel y Hamilton-Morgan [16-24]. Estos nuevos procedimientos se basan en el uso de la integración de contorno, a partir de la implementación del análisis vectorial (Teorema de Stokes). La ventaja principal radica en la simplificación del análisis, pues la suma de series infinitas se reduce a la suma de integrales dobles proyectadas sobre cada superficie de forma individual. Sin embargo, presentan el inconveniente que la última integración sobre el contorno que cierra la matriz del vector rotacional, requiere de una solución analítica dependiente de las condiciones de frontera, por tanto la solución no es unívoca, y cambia incluso para una misma configuración geométrica.

En la actualidad, la literatura técnica disponible y conocida no proporciona una solución analítica única para el cálculo de los factores de visión entre superficies rectangulares paralelas o inclinadas, siendo requerido la determinación de los intercambios por radiación mediante la reglas de sumas y el factor de algebra [25].

A partir de las bondades que proporciona el cálculo vectorial, esta investigación se concentra en obtener una relación que permita la estimación directa del factor de visión entre superficies rectangulares paralelas o inclinadas. Las soluciones exactas obtenidas por medio de la integración de contorno serán comparadas con los valores calculados a partir del algebra de forma (AF) usando la solución de Hottel y Hamilton-Morgan y con la resultados computados a partir de la integración numérica de la cuádruple integral mediante la regla de Simpson 1/3 con cinco intervalos. La ausencia de similares precedentes en la literatura técnica, refuerza el carácter práctico y científico del método de análisis propuesto.

2. Materiales y Métodos

Definición del factor de visión

El factor de visión es elemento clave en los cálculos de la transferencia de calor por radiación. El mismo depende de la posición y configuración de la superficie emisora y receptora, por lo que su determinación es extremadamente compleja y en múltiples ocasiones son obtenidos resultados erróneos. El factor de visión F_{12} es definido como la fracción de la radiación que abandona la

superficie A_1 y que es interceptada por la superficie A_2 . Matemáticamente esto queda expresado mediante la siguiente relación [26]:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_1 dA_2 \quad (1)$$

Donde: A_1 y A_2 son las superficies emisora y receptora, respectivamente. θ_1 y θ_2 son los ángulos entre el vector normal a las áreas dA_1 y dA_2 , y la línea que conecta el centro de las superficies A_1 y A_2 ; respectivamente. r es la distancia entre el centro de las superficies A_1 y A_2 , (véase la Fig.3).

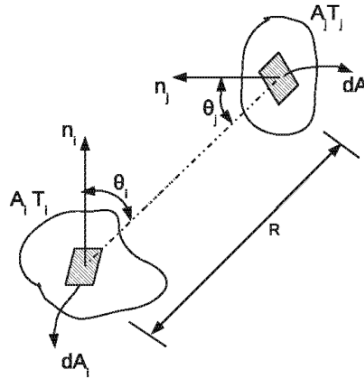


Fig.3 Geometría básica usada para definir el factor de visión

La ecuación (1) incluye una integración doble, lo cual es un problema extremadamente laborioso en múltiples ocasiones, por este motivo, al estimar el factor de visión en cualquier geometría, es requerido manejar un grupo elevado de operaciones de integración. Para simplificar el análisis, son utilizadas aproximaciones numéricas. Para configuraciones tridimensionales varios métodos son implementados, como la integración directa, Monte Carlo, *ray tracing* y métodos matriciales [25]. En esta investigación será utilizada la integración directa mediante el cálculo vectorial, para la obtención de los factores de visión de las geometrías analizadas.

Modelación matemática de superficies rectangulares A_1 y A_2 situadas en planos paralelos

El cálculo del factor de visión para dos superficies rectangulares arbitrarias localizadas en planos paralelos es ejecutado mediante una suma de series infinitas, la cual incluye las coordenadas del centro y de los bordes de ambas superficies, proyectadas respectivamente sobre los planos paralelos (véase la Fig. 1). Para simplificar el problema, las coordenadas de los bordes en las superficies A_1 y A_2 son sustituidas por sus correspondientes distancias al origen de coordenadas (0,0). Al realizar esta transformación son obtenidos tres casos básicos (véase la Fig.4):

- Caso 1: Rectángulos A_1 y A_2 iguales, paralelos y alineados
- Caso 2: Rectángulo A_1 y A_2 que comparte un borde con los ejes x y y .
- Caso 3: Rectángulo A_1 y A_2 situados en planos paralelos.

En el caso 3 si se cumple que $f = g = 0$, entonces este se simplifica al caso 2. En los casos 1, 2 y 3, las coordenadas para los centros de los superficie emisora y receptora son $(x_1, y_1, 0)$ y (x_2, y_2, h) respectivamente. La combinación de estas coordenadas permite obtener múltiples soluciones para la determinación del factor de visión. Acá, la integración será efectuada primeramente sobre la superficie receptora A_2 . Analizando la Figura 4, es posible obtener los ángulos θ_1 y θ_2 entre el vector normal a las áreas A_1 y A_2 , los cuales vienen dados por:

$$\cos O_1 = \cos O_2 = \frac{h}{r} \quad (2)$$

Mientras la distancia entre el centro de las superficies A_1 y A_2 será:

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \quad (3)$$

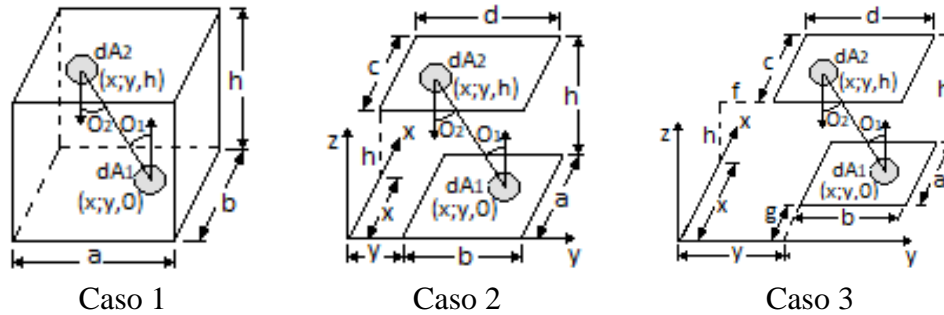


Fig.4 Configuraciones básicas para los casos 1 al 3

Caso 1

Para el caso 1, al ser usadas coordenadas rectangulares, las normales a las superficies A_1 y A_2 pueden ser representadas a través de los cosenos direccionales (l,m,n) , los cuales serían los cosenos entre la normal al área y los ejes (x, y, z) respectivamente, obteniéndose:

$$\cos \beta_1 = \frac{l_1(x_2 - x_1) + m_1(y_2 - y_1) + n_1(z_2 - z_1)}{r} \quad (4)$$

$$\cos \beta_2 = \frac{l_2(x_1 - x_2) + m_2(y_1 - y_2) + n_2(z_1 - z_2)}{r} \quad (5)$$

El teorema de Stokes plantea que:

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \left\{ \iint_A \begin{vmatrix} \cos l & \cos m & \cos n \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dA ; \begin{cases} \cos l = l \\ \cos m = m \\ \cos n = n \end{cases} \right\} \quad (6)$$

$$\iint_A \left[l \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dA$$

Sustituyendo las ecuaciones (3) a la (5) en la ecuación (1) se obtiene paso a paso:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \iint \iint \iint_{A_1 A_2} \left\{ \frac{l_1(x_2 - x_1) + m_1(y_2 - y_1) + n_1(z_2 - z_1)}{r} \cdot \frac{dA_1 dA_2}{r^2} \right.$$

$$\left. f = \frac{l_1(x_2 - x_1) + m_1(y_2 - y_1) + n_1(z_2 - z_1)}{r^4} dA_1 \right.$$

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \iint \iint \iint_{A_1 A_2} \{ l_2(x_1 - x_2)f + m_2(y_1 - y_2)f + n_2(z_1 - z_2)f \} dA_2$$

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \iint \iint \iint_{A_1 A_2} \left\{ l_2 \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + m_2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + n_2 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right\} dA_2 \quad (7)$$

A partir de la ecuación (7) se establece que:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y_2} - \frac{\partial Q}{\partial z_2}\right) = (x_1 - x_2)f ; \left(\frac{\partial P}{\partial z_2} - \frac{\partial R}{\partial x_2}\right) = (y_1 - y_2)f ; \left(\frac{\partial Q}{\partial x_2} - \frac{\partial P}{\partial y_2}\right) = (z_1 - z_2)f \quad (8)$$

Las funciones P, Q, R que satisfacen la ecuación (8) para la superficie emisora A_1 vienen dadas por:

$$P = \frac{-m_1(z_2 - z_1) + n_1(y_2 - y_1)}{2\pi r^2} \quad (9)$$

$$Q = \frac{l_1(z_2 - z_1) - n_1(x_2 - x_1)}{2\pi r^2} \quad (10)$$

$$R = \frac{-l_1(y_2 - y_1) + m_1(x_2 - x_1)}{2\pi r^2} \quad (11)$$

Aplicando el teorema de Stokes, ecuación (6).

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi A_1} \oint_C \left\{ \frac{-m_1(z_2 - z_1) + n_1(y_2 - y_1)}{r^2} dx_2 + \frac{l_1(z_2 - z_1) - n_1(x_2 - x_1)}{r^2} dy_2 + \frac{-l_1(y_2 - y_1) + m_1(x_2 - x_1)}{r^2} dz_2 \right\} \quad (12)$$

Para la superficie A_2 se aplica la Ecuación (12), obteniéndose una integral de contorno para cada eje coordenado, con los respectivos diferenciales de cada eje coordenado sobre la superficie A_2 :

$$2\pi A_1 F_{12} = \oint_{A_2} dx_2 \iint_{A_1} \frac{-m_1(z_2 - z_1) + n_1(y_2 - y_1)}{r^2} dA_1 + \oint_{A_2} dy_2 \iint_{A_1} \frac{l_1(z_2 - z_1) - n_1(x_2 - x_1)}{r^2} dA_1 + \oint_{A_2} dz_2 \iint_{A_1} \frac{-l_1(y_2 - y_1) + m_1(x_2 - x_1)}{r^2} dA_1 \quad (13)$$

La ecuación (13) está compuesta por tres sumas integrales.

$$\oint_{A_2} dx_2 \iint_{A_1} \frac{-m_1(z_2 - z_1) + n_1(y_2 - y_1)}{r^2} dA_1 \quad (\text{eje } x) \quad (14)$$

$$\oint_{A_2} dy_2 \iint_{A_1} \frac{l_1(z_2 - z_1) - n_1(x_2 - x_1)}{r^2} dA_1 \quad (\text{eje } y) \quad (15)$$

$$\oint_{A_2} dz_2 \iint_{A_1} \frac{-l_1(y_2 - y_1) + m_1(x_2 - x_1)}{r^2} dA_1 \quad (\text{eje } z) \quad (16)$$

Para determinar el rotacional en el eje x es usada la ecuación (14), obteniéndose:

$$\left\{ F = \begin{vmatrix} l & m & n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial z_1} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ; l_1 \left(\frac{\partial R}{\partial y_1} - \frac{\partial Q}{\partial z_1} \right) + m_1 \left(\frac{\partial P}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right) + n_1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial y_1} \right) \right. \quad (17) \\ \left. \begin{matrix} \frac{\partial R}{\partial y_1} - \frac{\partial Q}{\partial z_1} = 0 ; \frac{\partial P}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial x_1} = -\frac{(z_2 - z_1)}{r^2} ; \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial y_1} = \frac{(y_2 - y_1)}{r^2} \\ r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2 \end{matrix} \right\}$$

Las funciones P, Q, R que satisfacen la ecuación (17) para el diferencial correspondiente al eje x de la superficie receptora A_2 vienen dadas por:

$$\left\{ F = \begin{vmatrix} l & m & n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \ln(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} ; \frac{\partial R}{\partial y_1} - \frac{\partial Q}{\partial z_1} = 0 ; \frac{\partial P}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial x_1} = -\frac{(z_2 - z_1)}{r^2} ; \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial y_1} = \frac{(y_2 - y_1)}{r^2} \right. \quad (18) \\ \left. P = \ln(r) ; Q = 0 ; R = 0 \right\}$$

Sustituyendo la ecuación (18) en la ecuación (14)

$$\oint_{A_1} \oint_{A_2} \ln(r) dx_1 dx_2 \quad (19)$$

Para determinar el rotacional en el eje y es usada la ecuación (15), obteniéndose:

$$\left\{ F = \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} l & m & n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial z_1} \\ P & Q & R \end{array} \right| ; l_1 \left(\frac{\partial R}{\partial y_1} - \frac{\partial Q}{\partial z_1} \right) + m_1 \left(\frac{\partial P}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right) + n_1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial y_1} \right) \\ \frac{\partial R}{\partial y_1} - \frac{\partial Q}{\partial z_1} = \frac{(z_2 - z_1)}{r^2} ; \frac{\partial P}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial x_1} = 0 ; \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial y_1} = -\frac{(x_2 - x_1)}{r^2} \end{array} \right\} \quad (20)$$

Las funciones P, Q, R que satisfacen la ecuación (20) para el diferencial correspondiente al eje y de la superficie receptora A_2 vienen dadas por:

$$\left\{ F = \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} l & m & n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial z_1} \\ 0 & \ln(r) & 0 \end{array} \right| ; \frac{\partial R}{\partial y_1} - \frac{\partial Q}{\partial z_1} = \frac{(z_2 - z_1)}{r^2} ; \frac{\partial P}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial x_1} = 0 ; \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial y_1} = -\frac{(x_2 - x_1)}{r^2} \\ P = 0 ; Q = \ln(r) ; R = 0 \end{array} \right\} \quad (21)$$

Sustituyendo la ecuación (21) en la ecuación (15)

$$\oint_{A_1} \oint_{A_2} \ln(r) dy_1 dy_2 \quad (22)$$

Para determinar el rotacional en el eje z es usada la ecuación (16), obteniéndose:

$$\left\{ F = \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} l & m & n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial z_1} \\ P & Q & R \end{array} \right| ; l_1 \left(\frac{\partial R}{\partial y_1} - \frac{\partial Q}{\partial z_1} \right) + m_1 \left(\frac{\partial P}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right) + n_1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial y_1} \right) \\ \frac{\partial R}{\partial y_1} - \frac{\partial Q}{\partial z_1} = -\frac{(y_2 - y_1)}{r^2} ; \frac{\partial P}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{(x_2 - x_1)}{r^2} ; \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial y_1} = 0 \end{array} \right\} \quad (23)$$

Las funciones P, Q, R que satisfacen la ecuación (23) para el diferencial correspondiente al eje z de la superficie receptora A_2 vienen dadas por:

$$\left\{ F = \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} l & m & n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial z_1} \\ 0 & 0 & \ln(r) \end{array} \right| ; \frac{\partial R}{\partial y_1} - \frac{\partial Q}{\partial z_1} = -\frac{(y_2 - y_1)}{r^2} ; \frac{\partial P}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{(x_2 - x_1)}{r^2} ; \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial y_1} = 0 \\ P = 0 ; Q = 0 ; R = \ln(r) \end{array} \right\} \quad (24)$$

Sustituyendo la ecuación (24) en la ecuación (16)

$$\oint_{A_1} \oint_{A_2} \ln(r) dz_1 dz_2 \quad (25)$$

Sumando las ecuaciones (19), (22) y (25)

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi A_1} \left\{ \oint_{A_1} \oint_{A_2} \ln(r) dx_1 dx_2 + \ln(r) dy_1 dy_2 + \ln(r) dz_1 dz_2 \right\} \quad (26)$$

Para evaluar las integrales de contorno dadas en la ecuación (26) es requerido establecer los contornos sobre cada superficie, fijando los sentidos del rotacional, considerando además que los rotacionales deben ser opuestos en ambas superficies. Para la superficie A_1 se considera que la trayectoria del rotacional por cada uno de los contornos de la superficie es opuesta a la rotación de las manecillas del reloj, mientras que para la superficie A_2 se aplica lo contrario. Para el convenio de signos de los vectores rotacionales se establece el sentido horario (dextrógiro), siendo positivo si la trayectoria comienza en el origen y negativo en caso contrario, tal como se muestra en la Figura 5. Como en ambas superficies se cumple que $dz_1 = dz_1 = 0$, entonces la ecuación (26) se simplifica:

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi A_1} \left\{ \oint_{A_1} \oint_{A_2} \ln(r) dx_1 dx_2 + \ln(r) dy_1 dy_2 \right\} \quad (27)$$

Se comienza la integración sobre la superficie A_2 fijando el origen de coordenadas (0,0,0) en la intercepción de los bordes I y III.

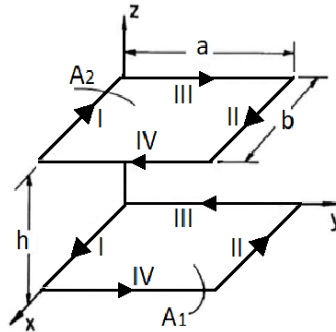


Fig.5 Sentidos del rotacional para el caso 1

Eje x, contorno I, superficie A_2

El rotacional ocurre sobre el eje x_2 , retornando al origen de coordenadas, comienza en $-b$ y acaba en 0. En el contorno no hay desplazamiento en el eje y_2 con respecto al origen, por tanto $y_2 = 0$

$$\int_{-b}^0 \ln(r) dx_2 = \int_{-b}^0 \ln \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1)^2 + z^2} dx_2 \quad (28)$$

Eje x, contorno II, superficie A_2

El rotacional ocurre sobre el eje x_2 , saliendo del origen de coordenadas, comienza en 0 y acaba en b . En el contorno hay un desplazamiento en el eje y_2 con respecto al origen, con un valor $y_2 = a$

$$\int_0^b \ln(r) dx_2 = \int_0^b \ln \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (a - y_1)^2 + z^2} dx_2 \quad (29)$$

Sumando las ecuaciones (18) y (29), y sustituyendo posteriormente en la ecuación (19) es obtenida la sumatoria de los contornos correspondientes al eje x sobre la superficie A_2

$$\oint_{A_1} dx_1 \left\{ \int_{-b}^0 \ln \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1)^2 + z^2} dx_2 + \int_0^b \ln \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (a - y_1)^2 + z^2} dx_2 \right\} \quad (30)$$

Eje y, contorno IV, superficie A_2

El rotacional ocurre sobre el eje y_2 , retornando al origen de coordenadas, comienza en $-a$ y acaba en 0. En el contorno hay un desplazamiento en el eje x_2 con respecto al origen, con un valor $x_2 = b$

$$\int_{-a}^0 \ln(r) dy_2 = \int_{-a}^0 \ln \sqrt{(b - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2} dy_2 \quad (31)$$

Eje y, contorno III, superficie A_2

El rotacional ocurre sobre el eje y_2 , saliendo al origen de coordenadas, comienza en 0 y acaba en a . En el contorno no hay desplazamiento en el eje x_2 con respecto al origen, por tanto $x_2 = 0$

$$\int_0^a \ln(r) dy_2 = \int_0^a \ln \sqrt{(x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2} dy_2 \quad (32)$$

Sumando las ecuaciones (31) y (32), y sustituyendo posteriormente en la ecuación (22) es obtenida la sumatoria de los contornos correspondientes al eje y sobre la superficie A_2 :

$$\oint_{A_1} dy_1 \left\{ \int_{-a}^0 \ln \sqrt{(b - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2} dy_2 + \int_0^a \ln \sqrt{(x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2} dy_2 \right\} \quad (33)$$

Para realizar la integración sobre la superficie A_1 es fijado el origen de coordenadas (0,0,0) en la intercepción de los bordes I y III.

Eje x, contorno II, superficie A_1

La deducción matemática es realizada a partir de la ecuación (30). El rotacional ocurre sobre el eje x_1 , retornando al origen de coordenadas, pero en sentido levógiro, por tanto, es negativo. Comienza en $-b$ y acaba en 0. En el contorno hay un desplazamiento en el eje y_1 con respecto al origen, con un valor $y_1 = a$. Sustituyendo las condiciones de frontera en la ecuación (30) y aplicando propiedades de integrales, se obtiene:

$$\int_{-b}^0 dx_1 \int_{-b}^0 \ln((x_2 - x_1)^2 + a^2 + z^2) dx_2 + \int_{-b}^0 dx_1 \int_0^b \ln((x_2 - x_1)^2 + z^2) dx_2 \tag{34}$$

Eje x, contorno I, superficie A_1

La deducción matemática es realizada a partir de la ecuación (30). El rotacional ocurre sobre el eje x_1 , abandonando el origen de coordenadas, pero en sentido levógiro, por tanto, es positivo. Comienza en 0 y acaba en b . En el contorno no hay desplazamientos en el eje y_1 con respecto al origen, por tanto $y_1 = 0$. Sustituyendo las condiciones de frontera en la ecuación (30) y aplicando propiedades de integrales, se obtiene:

$$\int_0^b dx_1 \int_{-b}^0 \ln((x_2 - x_1)^2 + z^2) dx_2 + \int_0^b dx_1 \int_0^b \ln((x_2 - x_1)^2 + a^2 + z^2) dx_2 \tag{35}$$

Eje y, contorno III, superficie A_1

La deducción matemática es realizada a partir de la ecuación (33). El rotacional ocurre sobre el eje y_1 , retornando el origen de coordenadas, pero en sentido levógiro, por tanto, es negativo. Comienza en $-a$ y acaba en 0. En el contorno no hay desplazamientos en el eje x_1 con respecto al origen, por tanto $x_1 = 0$. Sustituyendo las condiciones de frontera en la ecuación (33) y aplicando propiedades de integrales, se obtiene:

$$\int_{-a}^0 dy_1 \int_{-a}^0 \ln(b^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2) dy_2 + \int_{-a}^0 dy_1 \int_0^a \ln((y_2 - y_1)^2 + z^2) dy_2 \tag{36}$$

Eje y, contorno IV, superficie A_1

La deducción matemática es realizada a partir de la ecuación (33). El rotacional ocurre sobre el eje y_1 , retornando al origen de coordenadas, pero en sentido levógiro, por tanto, es negativo. Comienza en 0 y acaba en a . En el contorno hay un desplazamiento en el eje x_1 con respecto al origen, con un valor $x_1 = b$. Sustituyendo las condiciones de frontera en la ecuación (33) y aplicando propiedades de integrales, se obtiene:

$$\int_0^a dy_1 \int_{-a}^0 \ln((y_2 - y_1)^2 + z^2) dy_2 + \int_0^a dy_1 \int_0^a \ln(b^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2) dy_2 \tag{37}$$

Por tanto, con la aplicación del teorema de Stokes, la cuádruple integral dada en la ecuación (1) es transformada a integrales dobles que son más fáciles de solucionar. Sumando las ecuaciones (34), (35),(36),(37), y sustituyendo posteriormente en la ecuación (13), se obtiene la solución matemática del caso 1, la cual vienen dada por la siguiente relación:

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi A_1} \left\{ \begin{aligned} &\int_{-b}^0 dx_1 \int_{-b}^0 \ln((x_2 - x_1)^2 + a^2 + z^2) dx_2 + \int_{-b}^0 dx_1 \int_0^b \ln((x_2 - x_1)^2 + z^2) dx_2 + \\ &+ \int_0^b dx_1 \int_{-b}^0 \ln((x_2 - x_1)^2 + z^2) dx_2 + \int_0^b dx_1 \int_0^b \ln((x_2 - x_1)^2 + a^2 + z^2) dx_2 + \\ &+ \int_{-a}^0 dy_1 \int_{-a}^0 \ln(b^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2) dy_2 + \int_{-a}^0 dy_1 \int_0^a \ln((y_2 - y_1)^2 + z^2) dy_2 + \\ &+ \int_0^a dy_1 \int_{-a}^0 \ln((y_2 - y_1)^2 + z^2) dy_2 + \int_0^a dy_1 \int_0^a \ln(b^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2) dy_2 \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

Por tanto, acaba de ser mostrado que la integral cuádruple dada en la ecuación (1), es resuelta mediante la suma de ocho integrales dobles, cuyas funciones primitivas se encuentran en tablas, lo

cual facilita la solución del problema. Para resolver la suma de integrales dobles, se realiza el siguiente cambio de variables:

$$A = \frac{a}{z} ; B = \frac{b}{z} ; \frac{z}{z} = 1 ; A_1 = a \cdot b = \frac{a}{z} \cdot \frac{b}{z} = AB \quad (39)$$

Al solucionar la suma de integrales dobles dada en la ecuación (38), es obtenida la solución analítica para computar el factor de visión en el caso 1, el cual viene dado por [27]:

$$F_{12} = \frac{2}{\pi AB} \left\{ \begin{array}{l} \ln \left(\sqrt{\frac{(1+A^2)(1+B^2)}{1+A^2+B^2}} \right) + B\sqrt{1+A^2} \tan^{-1} \left(\frac{B}{\sqrt{1+A^2}} \right) - \\ -A \tan^{-1}(A) + A\sqrt{1+B^2} \tan^{-1} \left(\frac{A}{\sqrt{1+B^2}} \right) - B \tan^{-1}(B) \end{array} \right\} \quad (40)$$

Una solución análoga fue obtenida por Hottel, mediante integración directa, siendo dada la solución en forma de suma de series infinitas [28].

Caso 2

Para el caso 2 (véase la Fig. 4), los límites de integración son establecidos para cada proyección sobre las superficies A_1 y A_2 , mientras las ecuaciones (2) y (3) son sustituidas en la ecuación (1), obteniéndose:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \int_y^{y+b} dy_1 \int_0^a dx_1 \int_x^{x+c} dx_2 \int_0^d \frac{h^2}{\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+z^2\}^2} dy_2 \quad (41)$$

Para evaluar la ecuación (41), es aplicado el mismo procedimiento descrito para el caso 1, utilizando las siguientes sustituciones:

$$A = \frac{a}{h} ; B = \frac{b}{h} ; C = \frac{c}{h} ; D = \frac{d}{h} ; X = \frac{x}{h} ; Y = \frac{y}{h} \quad (42)$$

La evaluación de la ecuación (42) resulta ser extremadamente laboriosa, pues se requiere manejar 128 transformaciones integrales, reduciendo posteriormente los términos semejantes y simplificar. La solución de la cuádruple integral dada en la ecuación (41) es obtenida por el mismo procedimiento aplicado para el caso 1 y viene dada por [27]:

$$F_{12} = \frac{1}{2AB\pi} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+(C+X)^2} \left[(Y+B) \tan^{-1} \left(\frac{Y+B}{\sqrt{1+(C+X)^2}} \right) + (Y-D) \tan^{-1} \left(\frac{Y-D}{\sqrt{1+(C+X)^2}} \right) - Y \tan^{-1} \left(\frac{Y}{\sqrt{1+(C+X)^2}} \right) - \right. \\ (Y-D+B) \tan^{-1} \left(\frac{Y-D+B}{\sqrt{1+(C+X)^2}} \right) \left. \right] + \sqrt{1+(X-A)^2} \left[(Y+B) \tan^{-1} \left(\frac{Y+B}{\sqrt{1+(X-A)^2}} \right) + (Y-D) \tan^{-1} \left(\frac{Y-D}{\sqrt{1+(X-A)^2}} \right) - \right. \\ Y \tan^{-1} \left(\frac{Y}{\sqrt{1+(X-A)^2}} \right) - (Y-D+B) \tan^{-1} \left(\frac{Y-D+B}{\sqrt{1+(X-A)^2}} \right) \left. \right] + \sqrt{1+(Y+B)^2} \left[(X+C) \tan^{-1} \left(\frac{X+C}{\sqrt{1+(Y+B)^2}} \right) + \right. \\ (X-A) \tan^{-1} \left(\frac{X-A}{\sqrt{1+(Y+B)^2}} \right) - X \tan^{-1} \left(\frac{X}{\sqrt{1+(Y+B)^2}} \right) - (X+C-A) \tan^{-1} \left(\frac{X+C-A}{\sqrt{1+(Y+B)^2}} \right) \left. \right] + \sqrt{1+(Y-D)^2} \left[(X+C) \right. \\ \left. \tan^{-1} \left(\frac{X+C}{\sqrt{1+(Y-D)^2}} \right) + (X-A) \tan^{-1} \left(\frac{X-A}{\sqrt{1+(Y-D)^2}} \right) - X \tan^{-1} \left(\frac{X}{\sqrt{1+(Y-D)^2}} \right) - (X+C-A) \tan^{-1} \left(\frac{X+C-A}{\sqrt{1+(Y-D)^2}} \right) \right] - \\ \sqrt{1+(C+X-A)^2} \left[(Y+B) \tan^{-1} \left(\frac{Y+B}{\sqrt{1+(C+X-A)^2}} \right) + (Y-D) \tan^{-1} \left(\frac{Y-D}{\sqrt{1+(C+X-A)^2}} \right) - Y \tan^{-1} \left(\frac{Y}{\sqrt{1+(C+X-A)^2}} \right) - \right. \\ (Y-D+B) \tan^{-1} \left(\frac{Y-D+B}{\sqrt{1+(C+X-A)^2}} \right) \left. \right] - \sqrt{Y^2+1} \left[(X+C) \tan^{-1} \left(\frac{X+C}{\sqrt{Y^2+1}} \right) + (X-A) \tan^{-1} \left(\frac{X-A}{\sqrt{Y^2+1}} \right) - X \tan^{-1} \left(\frac{X}{\sqrt{Y^2+1}} \right) - \right. \\ (X+C-A) \tan^{-1} \left(\frac{X+C-A}{\sqrt{Y^2+1}} \right) \left. \right] - \sqrt{X^2+1} \left[(Y+B) \tan^{-1} \left(\frac{Y+B}{\sqrt{X^2+1}} \right) + (Y-D) \tan^{-1} \left(\frac{Y-D}{\sqrt{X^2+1}} \right) - Y \tan^{-1} \left(\frac{Y}{\sqrt{X^2+1}} \right) - \right. \\ (Y-D+B) \tan^{-1} \left(\frac{Y-D+B}{\sqrt{X^2+1}} \right) \left. \right] - \sqrt{1+(Y+B-D)^2} \left[(X+C) \tan^{-1} \left(\frac{X+C}{\sqrt{1+(Y+B-D)^2}} \right) + (X-A) \tan^{-1} \left(\frac{X-A}{\sqrt{1+(Y+B-D)^2}} \right) - \right. \\ X \tan^{-1} \left(\frac{X}{\sqrt{1+(Y+B-D)^2}} \right) - (X+C-A) \tan^{-1} \left(\frac{X+C-A}{\sqrt{1+(Y+B-D)^2}} \right) \left. \right] + \\ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\left(\frac{\{(C+X)^2+1+Y^2\} \times \{(C+X)^2+(Y-D+B)^2+1\}}{(Y^2+X^2+1) \times \{(C+X)^2+(Y+B)^2+1\}} \right) \left(\frac{\{(Y+B)^2+1+X^2\} \times \{(Y-D)^2+X^2+1\}}{\{(C+X)^2+(Y-D)^2+1\} \times \{(C+X-A)^2+Y^2+1\}} \right)}{\left(\frac{\{(X-A)^2+Y^2+1\} \times \{(X-A)^2+(Y-D+B)^2+1\}}{\{(C+X-A)^2+(Y-D+B)^2+1\} \times \{(X-A)^2+(Y+B)^2+1\}} \right) \left(\frac{\{(C+X-A)^2+(Y+B)^2+1\} \times \{(C+X-A)^2+(Y-D)^2+1\}}{\{(X-A)^2+(Y-D)^2+1\} \times \{X^2+(Y-D+B)^2+1\}} \right)} \right] \end{array} \right\}$$

Caso 3

Para el caso 3 los límites de integración son dados mediante la siguiente relación [28]:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \int_y^{y+b} dy_1 \int_g^{g+a} dx_1 \int_x^{x+c} dx_2 \int_f^{f+d} \frac{h^2}{\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+h^2\}^2} dy_2 \quad (44)$$

Para solucionar la ecuación (44) es requerido calcular la solución de cuatro proyecciones de las superficies A_1 y A_2 , modificando las condiciones de fronteras A y D, dadas con anterioridad en la ecuación (42) y manteniendo constantes el resto de las condiciones (véase la Fig. 4), de esta forma son resueltas las cuatro proyecciones requeridas. En la Tabla 1 son resumidas las modificaciones que deben ser realizadas a las condiciones de frontera A y D en cada proyección.

Tabla 1. Modificaciones a las condiciones A y D para el Caso 3

Proyección	Condiciones
1	$A = (a + g)/h$; $D = (d + f)/h$
2	$A = (a + g)/h$; $D = f/h$
3	$A = g/h$; $D = f/h$
4	$A = g/h$; $D = (d + f)/h$

A partir de lo planteado, el factor de visión para el caso 3 es obtenido mediante la siguiente relación:

$$F_{12} = (g/a + 1)(P_1 - P_2) + (g/a)(P_3 - P_4) \quad (45)$$

Donde: P_1, P_2, P_3, P_4 son los valores de los factores de visión calculados mediante la ecuación (43) para las proyecciones 1,2,3,4 respectivamente, aplicando para ello las condiciones de frontera dadas en la tabla 1 y en la ecuación (42). Para las dimensiones usadas véase la Fig. 4.

En el caso 3 si se cumple que $f = g = 0, x = y = 0, a = c, y b = d$, entonces el problema se reduce a la determinación del factor de visión para el caso 1.

Superficies rectangulares A_1 y A_2 situadas en planos inclinados

Caso 4

El factor de visión entre dos rectángulos situados en planos inclinados en un ángulo θ y que además comparten un borde común es determinado por un procedimiento similar al usado para los casos 1 al 3, y es dado por:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \iint \frac{\cos O_1 \cos O_2 dA_1 dA_2}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^c dy_1 \int_0^b dx \int_0^a dz \int_0^b \frac{xz}{\{(y_1-y_2)^2+x^2+z^2-2xz \cos \theta\}^2} dy_2 \quad (46)$$

Para evaluar la ecuación (46) son usadas las siguientes sustituciones:

$$X = a/b \quad ; \quad Y = c/b \quad ; \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 - 2XY \cos \theta} \quad (47)$$

Aplicando el mismo procedimiento descrito para el caso 1, es obtenida la solución de la cuádruple integral Eq. (51):

$$F_{12} = \frac{1}{\pi Y} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\sin 2\theta}{4} \left\{ Y^2 \tan^{-1} \left(\frac{X}{Y} \csc \theta - \cot \theta \right) + X^2 \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \csc \theta - \cot \theta \right) + XY \sin \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) (X^2 + Y^2) \right\} + \\ & + \frac{1}{4} \ln \left\{ \left(\frac{X^2 (1+X^2)}{R^2 (1+R^2)} \right)^{\cos 2\theta} \left(\frac{Y^2 \sin^2 \theta}{R^2 + Y^2 R^2} \right)^{X^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{Y^2 \sin^2 \theta}{R^2 + Y^2 R^2} \right)^{Y^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+R^2} \right)^{\cos^2 \theta + 1} \right\} + \\ & + (\sin^3 \theta \cos \theta) \tan^{-1} \left(\frac{Y \sin \theta \sqrt{X^2 + \cot^2 \theta + 1}}{X^2 - YX \cos \theta + 1} \right) \sqrt{X^4 + X^2 (\cot^2 \theta + 1)} + X \tan^{-1} \left(\frac{1}{X} \right) + \\ & + Y \tan^{-1} \left(\frac{1}{Y} \right) + -R \cot^{-1}(R) + \frac{\sin 2\theta}{2} \int_0^Y \sqrt{z^2 + \cot^2 \theta + 1} \tan^{-1} \left(\frac{X \sin \theta \sqrt{z^2 + \cot^2 \theta + 1}}{z^2 - zX \cos \theta + 1} \right) dz \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

En las ecuaciones (46) a la (48) el ángulo θ es dado en radianes.

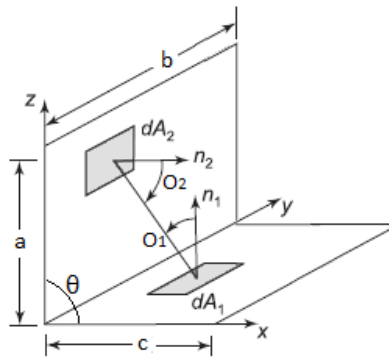


Fig. 5 Rectángulos con borde común y ángulo θ incluido

La ecuación (48) contiene una integral no resuelta, pues su solución es extremadamente compleja, por lo que su valor será computado mediante la regla de Simpson 1/3 con ocho intervalos. En la integración numérica, para cada intervalo la variable z será sustituida por la correspondiente longitud de la superficie emisora C , obteniéndose una solución (ω_n) para cada intervalo (véase la Tabla 2).

Tabla 2. Valores de z para la integración numérica en la ecuación (48)

0	Int.1	Int.2	Int.3	Int.4	Int.5	Int.6	Int.7	Int.8
0	0.125C	0.25C	0.375C	0.5C	0.625C	0.75C	0.875C	C
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9

Entonces, la evaluación de la integral presente en la ecuación (48) vendrá dada por:

$$\int_0^Y \left\{ \sqrt{1 + z^2 \sin^2 \theta} \tan^{-1} \left(\frac{X\sqrt{1 + z^2 \sin^2 \theta}}{z^2 - zX \cos \theta + 1} \right) \right\} dz \cong \frac{C}{24} (\omega_1 + \omega_9 + 2(\omega_3 + \omega_5 + \omega_7) + 4(\omega_2 + \omega_4 + \omega_6 + \omega_8)) \tag{49}$$

Si se cumple que $\theta = 90^\circ$, entonces la ecuación (48) es simplificada a [27]:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi Y} \left\{ X \tan^{-1} \left(\frac{1}{X} \right) + Y \tan^{-1} \left(\frac{1}{Y} \right) - R \cot^{-1}(R) + \frac{1}{4} \ln \left\{ \left(\frac{X^2 + X^2 R^2}{R^2 + X^2 R^2} \right)^{X^2} \left(\frac{Y^2 + Y^2 R^2}{R^2 + Y^2 R^2} \right)^{Y^2} \left(\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+R^2} \right) \right\} \tag{50}$$

En la ecuación (50) es usada la siguiente notación:

$$X = W/D \ ; \ Y = L/D \ ; \ R = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{51}$$

3. Resultados y Discusión

En la Tabla 3 son resumidos 35 ejemplos con diversas proporciones dimensionales correspondientes al caso 2, los cuales fueron usados en la comparación entre los resultados obtenidos por la regla de sumatoria sobre la solución con series infinitas de Hottel (SR), la solución numérica computada con la integración numérica de la cuádruple integral mediante la regla de Simpson 1/3 con cinco intervalos (MSR) y la solución analítica dada en la ecuación (43).

En la Tabla 4 son resumidos 42 ejemplos con diversas proporciones dimensionales correspondientes al caso 3, los cuales fueron usados en la comparación entre los resultados

obtenidos por la regla de sumatoria sobre la solución con series infinitas de Hottel (SR), la solución numérica computada con la integración numérica de la cuádruple integral mediante la regla de Simpson 1/3 con cinco intervalos (MSR) y la solución analítica ecuación (45).

Tabla 3. Comparación de factores de visión para el caso 2

	$R_1 = 0.2$ $y = 0.2$ $R_2 = 8$ $x = 8$	$R_1 = 0.5$ $y = 0.5$ $R_2 = 6$ $x = 6$	$R_1 = 1$ $y = 1$ $R_2 = 4;$ $x = 4$	$R_1 = 1$ $y = 1$ $R_2 = 1$ $x = 1$	$R_1 = 4$ $y = 4$ $R_2 = 1$ $x = 1$	$R_1 = 6$ $y = 6$ $R_2 = 0.5$ $x = 0.5$	$R_1 = 8$ $y = 8$ $R_2 = 0.2$ $x = 0.2$
	$h = 1$						
SR	0.003	0.00986	0.02859	0.14671	0.39045	0.39133	0.38898
MSR	0.00292	0.00974	0.02914	0.14198	0.39443	0.39551	0.37992
Ec. (43)	0.00304	0.00982	0.02866	0.1464	0.39018	0.39125	0.38905
	$h = 2$						
SR	0.00264	0.00885	0.02579	0.13979	0.36836	0.37669	0.37437
MSR	0.00273	0.00876	0.02611	0.14309	0.36917	0.38021	0.37012
Ec. (43)	0.00267	0.00882	0.02596	0.13963	0.36855	0.37654	0.37463
	$h = 4$						
SR	0.00237	0.00779	0.02239	0.12561	0.31703	0.34208	0.34263
MSR	0.00221	0.00752	0.0247	0.12403	0.30952	0.34663	0.34881
Ec. (43)	0.00239	0.00774	0.02234	0.12575	0.31669	0.34212	0.34251
	$h = 6$						
SR	0.00219	0.00715	0.01998	0.11349	0.26752	0.30533	0.30831
MSR	0.00226	0.00697	0.0209	0.11287	0.26713	0.30119	0.3115
Ec. (43)	0.00214	0.00711	0.02	0.11342	0.26744	0.30542	0.30816
	$h = 10$						
SR	0.00193	0.00624	0.01672	0.09348	0.18911	0.23544	0.24043
MSR	0.00204	0.00639	0.01593	0.09441	0.17762	0.23014	0.24499
Ec. (43)	0.00191	0.00627	0.01686	0.09333	0.18905	0.23523	0.24021

Nota: $R_1 = a/b$; $R_2 = c/d$

Tabla 4. Comparación de factores de visión para el caso 3

	$R_1 = 0.2$ $y = 0.2$ $R_2 = 8;$ $x = 8$	$R_1 = 0.5$ $y = 0.5$ $R_2 = 6$ $x = 6$	$R_1 = 1$ $y = 1$ $R_2 = 4$ $x = 4$	$R_1 = 1$ $y = 1$ $R_2 = 1$ $x = 1$	$R_1 = 4$ $y = 4$ $R_2 = 1$ $x = 1$	$R_1 = 6$ $y = 6$ $R_2 = 0.5$ $x = 0.5$	$R_1 = 8$ $y = 8$ $R_2 = 0.2$ $x = 0.2$
	$h = 1 ; f = 1 ; g = 1$						
SR	0.01287	0.19861	0.16577	0.88032	0.46455	0.31681	0.30706
MSR	0.01176	0.19533	0.17023	0.88119	0.46669	0.31401	0.30991
Ec. (45)	0.01294	0.1983	0.16561	0.88028	0.46434	0.31685	0.30729
	$h = 1 ; f = 0.5 ; g = 4$						
SR	0.02357	0.23668	0.17492	0.88315	0.46377	0.30844	0.30255
MSR	0.02433	0.23119	0.17011	0.88203	0.45936	0.31166	0.30442
Ec. (45)	0.02361	0.23666	0.17486	0.8831	0.46364	0.30857	0.30269
	$h = 1 ; f = 4 ; g = 0.5$						
SR	0.02791	0.24269	0.26562	0.88219	0.46288	0.31677	0.31533
MSR	0.02644	0.24773	0.27119	0.88337	0.46271	0.30943	0.31669
Ec. (45)	0.02782	0.24252	0.26574	0.88201	0.46295	0.31687	0.31529
	$h = 5 ; f = 1 ; g = 1$						
SR	0.01762	0.13772	0.12184	0.54779	0.34338	0.20449	0.19931
MSR	0.01804	0.14206	0.11889	0.54553	0.34812	0.20411	0.18643

Ec. (45)	0.0179	0.13784	0.12175	0.54771	0.3441	0.20445	0.19922
$h = 5 ; f = 0.5 ; g = 4$							
SR	0.01226	0.18044	0.12602	0.60228	0.35668	0.21532	0.21779
MSR	0.01149	0.18099	0.12644	0.59989	0.35447	0.21204	0.21446
Ec. (45)	0.01224	0.18051	0.12599	0.60212	0.35611	0.21547	0.21773
$h = 5 ; f = 4 ; g = 0.5$							
SR	0.00924	0.15429	0.18851	0.54388	0.32804	0.19351	0.18329
MSR	0.00881	0.15837	0.18866	0.54110	0.32661	0.19776	0.18556
Ec. (45)	0.00937	0.15444	0.18849	0.54373	0.32827	0.19332	0.18317

Note: $R_1 = a/b ; R_2 = c/d$

En la Tabla 5 son resumidos 60 ejemplos con diversas proporciones dimensionales correspondientes al caso 4, los cuales fueron usados en la comparación entre los resultados obtenidos por la regla de sumatoria sobre la solución con series infinitas de Hamilton-Morgan (SHM), la solución numérica computada con la integración numérica de la cuádruple integral mediante la regla de Simpson 1/3 con cinco intervalos (MSR) y la solución analítica ecuación (48).

Tabla 5. Comparación de factores de visión para el caso 4

	$R_1 = 0.2$	$R_1 = 0.6$	$R_1 = 1$	$R_1 = 6$	$R_1 = 10$	$R_1 = 6$	$R_1 = 1$	$R_1 = 0.6$	$R_1 = 1$	$R_1 = 10$
	$R_2 = 10$	$R_2 = 6$	$R_2 = 1$	$R_2 = 0.6$	$R_2 = 0.2$	$R_2 = 1$	$R_2 = 6$	$R_2 = 1$	$R_2 = 0.6$	$R_2 = 10$
$\theta = 30^\circ$										
SHM	0,01747	0,07844	0,61868	0,78442	0,8741	0,71198	0,11868	0,45353	0,75698	0,2364
MSR	0,01738	0,07858	0,62262	0,77692	0,8783	0,7169	0,11761	0,45975	0,74298	0,23753
Ec. (48)	0,01746	0,07831	0,61903	0,78311	0,8728	0,71099	0,1185	0,45282	0,7547	0,23596
$\theta = 45^\circ$										
SHM	0,01536	0,06559	0,48315	0,65598	0,7684	0,57338	0,09553	0,36774	0,61407	0,16036
MSR	0,01525	0,06571	0,48707	0,64704	0,7747	0,5759	0,09442	0,36491	0,60611	0,16196
Ec. (48)	0,01535	0,06546	0,48335	0,6546	0,7678	0,57259	0,09543	0,36831	0,61384	0,16012
$\theta = 60^\circ$										
SHM	0,01297	0,05287	0,37103	0,52896	0,6482	0,44914	0,07478	0,28969	0,48346	0,11281
MSR	0,01285	0,05308	0,37024	0,52034	0,6575	0,44791	0,0746	0,28756	0,4802	0,1143
Ec. (48)	0,01296	0,05281	0,37091	0,52809	0,6481	0,4485	0,07475	0,29015	0,48358	0,11266
$\theta = 120^\circ$										
SHM	0,00379	0,01367	0,08665	0,13709	0,1888	0,10881	0,01812	0,07088	0,11853	0,02267
MSR	0,00374	0,01372	0,08504	0,13404	0,1913	0,10822	0,01803	0,07037	0,11751	0,02286
Ec. (48)	0,00378	0,01365	0,08662	0,13651	0,1888	0,10863	0,01811	0,071	0,11833	0,02264
$\theta = 135^\circ$										
SHM	0,00216	0,00771	0,04833	0,07726	0,1082	0,0609	0,01014	0,03972	0,06641	0,01246
MSR	0,00214	0,00774	0,04762	0,0759	0,1084	0,06055	0,01008	0,03945	0,06587	0,01256
Ec. (48)	0,00216	0,0077	0,04831	0,07699	0,1082	0,0608	0,01013	0,03979	0,06631	0,01244
$\theta = 150^\circ$										
SHM	0,00097	0,00344	0,02136	0,03438	0,0487	0,02697	0,00449	0,01761	0,02944	0,00545
MSR	0,00096	0,00345	0,02109	0,03385	0,0492	0,02682	0,00447	0,01749	0,0292	0,00549
Ec. (48)	0,00097	0,00343	0,02135	0,03427	0,0488	0,02693	0,00449	0,01764	0,02939	0,00544

Nota: $R_1 = a/b ; R_2 = c/b$

En las comparaciones realizadas se aprecia que en la totalidad de los casos examinados, los valores computados con el uso de las soluciones exactas, son casi idénticos a los arrojados con el uso de la regla de sumatoria sobre la solución con series infinitas de Hamilton-Morgan o Hottel. La regla de sumatoria requiere el uso de sumas de series, por lo que en la medida que sean agregados más

términos a la suma, más cercana será el valor obtenido a la solución exacta. En el caso de la regla de Simpson 1/3 se aprecia algunas dispersiones mayores o menores, lo cual se justifica dado que solo fueron seleccionados cinco intervalos, al igual que en el caso de la suma de series, la mayor proximidad al valor exacto va a ser proporcional a la cantidad de términos usados.

4. Conclusiones

El cálculo del factor de visión es uno de los puntos más importantes en la transferencia de calor por radiación. Disponer de una solución analítica que proporcione un valor exacto facilita el trabajo del ingeniero térmico, evitando así el uso de tediosas operaciones con la regla de la sumatoria. El presente trabajo proporciona información detallada sobre la obtención de factores de visión entre superficies rectangulares inclinadas o paralelas en el espacio 3-D, utilizando la integración de contornos.

Las soluciones exactas obtenidas mediante la integración de contornos fueron comparadas con los valores calculados a partir del factor algebraico mediante la solución de Hottel y Hamilton-Morgan y con los resultados calculados a partir de la integración numérica de la integral cuádruple mediante la regla 1/3 de Simpson con cinco intervalos. En todos los casos se encontró un ajuste adecuado; indicando que el método analítico desarrollado es adecuado para su uso práctico en la ingeniería térmica.

Dada la ausencia de precedentes similares en la literatura disponible y consultada, la solución analítica propuesta contribuye a reforzar el carácter práctico de esta investigación, que puede incorporarse a los catálogos actualmente disponibles para el cálculo de los factores de visión.

Referencias

- 1- Howell, J.R., Mengüç, M.P., *Radiative transfer configuration factor catalog: A listing of relations for common geometries*. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2011. **112**(5): p. 910-912. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2010.10.002>
- 2- Gupta, M. K., Bumtariya, K.J., Shukla, H.A., Patel, P., Khan, Z., *Methods for evaluation of radiation view factor: a review*. Materials Today: Proceedings, 2017. **4**(2): p. 1236-1243. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.01.143>
- 3- Howell, J.R., Mengüç, M.P., Daun, K., Siegel, R., *Thermal Radiation Heat Transfer*. 2020. New York: CRC Press. ISBN: 978-0367347079
- 4- Lakhi, M., Safavinejad, A., *Numerical investigation of combined force convective-radiative heat transfer in a horizontal channel with lattice Boltzmann method*. Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 2021. **146**(4): p. 1911-1922. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10973-020-10136-9>
- 5- Abishek, S., Balachandar, R., Barron, R., *Quasi-1D model for exhaust gas and pipe with convective and temperature dependent emissivity based radiative heat losses*. Thermal Science and Engineering Progress, 2020. **18**: p. 100500. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2020.100500>
- 6- Narayanaswamy, A., *An analytic expression for radiation view factor between two arbitrarily oriented planar polygons*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2015. **91**: p. 841-847. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.07.131>
- 7- Camaraza-Medina, Y., Hernández-Guerrero, A., Luviano-Ortiz, J. L., *Experimental study on influence of the temperature and composition in the steels thermo physical properties for heat transfer applications*. Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 2022. **147**: p. 11805-11821. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10973-022-11410-8>

- 8- Howell, J.R., *A catalog of radiation heat transfer configuration factors*. <http://www.thermalradiation.net/indexCat.html>
- 9- Gross, U., Spindler, K., Hahne, E., *Shape factor equations for radiation heat transfer between plane rectangular surfaces of arbitrary position and size with parallel boundaries*. Letters in heat and mass transfer, 1981. **8**(3): p. 219-227. DOI: [https://doi.org/10.1016/0094-4548\(81\)90016-3](https://doi.org/10.1016/0094-4548(81)90016-3)
- 10- Ehlert, J.R., Smith, T.F., *View factors for perpendicular and parallel rectangular plates*. Journal of thermophysics and heat transfer, 1993. **7**(1): p. 173-175. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.11587>
- 11- Krishnaprakas, C.K., *View factor between inclined rectangles*. Journal of thermophysics and heat transfer, 1997. **11**(3): p.480-481. DOI: <https://doi.org/10.2514/2.6267>
- 12- Hottel, H.C., *Radiant Heat Transmission between surfaces Separated by Nonabsorbing Media*. Trans. ASME, 1931. **53**: p. 265-273.
- 13- Boeke, W., Wall, L., *Radiative exchange factors in rectangular spaces for the determination of mean radiant temperatures*. Building Services Engineering, 1976. **43**: p. 244-253.
- 14- Hsu, C.J., *Shape factor equations for radiant heat transfer between two arbitrary sizes of rectangular planes*. Canadian Journal of Chemical Engineering, 1967. **45**: p. 58-60.
- 15- Hamilton, D.C., Morgan, W.R., *Radiant-interchange configuration factors*. NASA TN 2836, 1952.
- 16- Sasaki, K., Sznajder, M., *Analytical view factor solutions of a spherical cap from an infinitesimal surface*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2020. **163**: p. 120477. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120477>
- 17- Guo, H., Ferrara, M., Coleman, J., Loyola, M., Meggers, F., *Simulation and measurement of air temperatures and mean radiant temperatures in a radiantly heated indoor space*. Energy, 2020. **193**: p. 116369. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2019.116369>
- 18- Nassar, Y.F., *Analytical-numerical computation of view factor for several arrangements of two rectangular surfaces with non-common edge*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2020. **159**: p. 120130. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120130>
- 19- Thyageswaran, S., *Simpler view factor calculations for mutually perpendicular rectangles*. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2022. **283**: p. 108151. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2022.108151>
- 20- Sönmez, F.F., Ziar, H., Isabella, O., Zeman, M., *Fast and accurate ray-casting-based view factor estimation method for complex geometries*. Solar Energy Materials and Solar Cells, 2019. **200**: p. 109934. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.solmat.2019.109934>
- 21- Vujičić, M.R., Lavery, N.P., Brown, S.G.R., *View factor calculation using the Monte Carlo method and numerical sensitivity*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2006. **22**(3): p. 197-203. DOI: <https://doi.org/10.1002/cnm.805>
- 22- Francisco, S.C., Raimundo, A.M., Gaspar, A.R., Oliveira, A.V.M., Quintela, D.A., *Calculation of view factors for complex geometries using Stokes' theorem*. Journal of Building Performance Simulation, 2014. **7**(3): p. 203-216. DOI: <https://doi.org/10.1080/19401493.2013.808266>
- 23- Manoram, R. B., Moorthy, R. S., Ragunathan, R., *Investigation on influence of dimpled surfaces on heat transfer enhancement and friction factor in solar water heater*. Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 2021. **145**(2): p. 541-558. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10973-020-09746-0>
- 24- Guo, H., Aviv, D., Loyola, M., Teitelbaum, E., Houchois, N., Meggers, F., *On the understanding of the mean radiant temperature within both the indoor and outdoor environment, a critical review*. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2020. **117**: p. 109207. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rser.2019.06.014>
- 25- Modest, F.M., Mazumder, S., *Radiative heat transfer*, 2022. Cambridge: Academic Press. ISBN: 978-0323984065

- 26- Mazumder, S., Ravishankar, M., *General procedure for calculation of diffuse view factors between arbitrary planar polygons*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2012. **55**(23-24): p. 7330-7335. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.07.066>
- 27- Camaraza-Medina, Y., Hernandez-Guerrero, A., Luviano-Ortiz, J.L., *Analytical view factor solution for radiant heat transfer between two arbitrary rectangular surfaces*. Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10973-022-11646-4>
- 28- Camaraza-Medina, Y., *Introduction to Thermal Radiation: a theoretical approach*. 2022. Chisinau: Our Knowledge Publishing. ISBN 978-620-47082-18

Agradecimientos

El autor muestra su agradecimiento por la ayuda y recomendaciones recibidas del Profesor Dr. John R. Howell, del Departamento de Ingeniería Mecánica, *University of Texas-Austin*, EUA y por el Profesor Dr. Jack H. Lewis, Departamento de Matemáticas, *Massachusetts Institute of Technology*, EUA

Conflicto de Intereses

El autor declara que no existen conflictos de intereses de ninguna índole en el presente artículo.

Contribución de los autores

Yanan Camaraza Medina. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2287-7519>

El autor realizó todo el trabajo de manera individual.