

Modelación cinemática y dinámica de un brazo robótico basado en barras de cuatro grados de libertad

Kinematic and dynamic modelling of a four degrees of freedom link-based robotic arm

Ramón Quiza^{1,*}, Teresa Pérez Sosa¹, Renier Fagundo Mesa¹

¹ Centro de Estudio de Fabricación Avanzada y Sostenible (CEFAS), Universidad de Matanzas, Autopista a Varadero km 3½. Matanzas 44740, Cuba.

*Autor de correspondencia: ramon.quiza@umcc.cu

Este documento posee una [licencia Creative Commons Reconocimiento/No Comercial 4.0 Internacional](#)



Recibido: 17 mayo 2021 Aceptado: 1 junio 2021 Publicado: 1 de septiembre 2021

Resumen

El presente trabajo describe el análisis cinemático de un brazo robótico basado en barras, de cuatro grados de libertad. En primer lugar, se presenta el diseño mecánico del brazo robótico con sus dimensiones nominalizadas. A continuación, se establece el análisis directo, que permite calcular la posición de todos los elementos del brazo en dependencia de los valores de los ángulos de control. Este análisis se hizo utilizando transformaciones y relaciones geométricas tridimensionales y las correspondientes expresiones de álgebra de matrices. El análisis inverso, también incluido, permite determinar los valores de los ángulos de control para valores dados de la posición y la inclinación de actuador. Con este fin, se utilizaron relaciones geométricas y trigonométricas. Finalmente, se llevó a cabo una simulación utilizando código de MATLAB, para comprobar las expresiones obtenidas. Las relaciones desarrolladas permitirán otros análisis del brazo robótico, como la determinación de las fuerzas estáticas y dinámicas y el estudio de las vibraciones. También serán utilizadas en la optimización de las rutas de movimiento.

Palabras clave: Brazo robótico, análisis cinemático, posiciones

Abstract

This work describes the kinematic analysis of a four degrees of freedom link-based robotic arm. In the first place, the mechanical design of the proposed robotic arm and its nominalized dimensions are presented. After that, it was stated the direct analysis, which allows computing the position of all arm elements, depending on the values of the control angles. This analysis was done by using the three-dimensional geometric transformations and relationships, and the corresponding matrix algebra expressions. The inverse analysis, also included, computes the values of the control angles, for the given position and inclination of the actuator. Geometric and trigonometric relationships were used for this purpose. Finally, a simulation by using a MATLAB code, was done for testing the obtained expressions. The achieved relationships will allow other analyses of the robotic arm, such as the static and dynamic force analysis, and vibration studies. It also will be used in the optimization of its motion paths.

Keywords: Robotic arm; kinematic analysis; positions

1. Introducción

La robótica no es solo uno de los pilares de la fabricación moderna [1], sino también, gracias a la integración con otras herramientas como la inteligencia artificial y la Internet de las cosas, constituye una tecnología básica en las transformaciones conducentes a la Industria 4.0 [2].

Dentro de esta rama, los brazos robóticos juegan un papel fundamental, por la versatilidad de sus aplicaciones [3]. A pesar de una concepción relativamente simple [4], los brazos robóticos pueden realizar un grupo de movimientos bastante amplio, dado por los grados de libertad con los cuales se haya diseñado, además de otras restricciones mecánicas [5]. Las aplicaciones de los brazos robóticos no sólo se centran en el campo industrial [6,7], sino que abarcan una amplia gama de sectores que incluyen la salud [8], la agricultura [9] e incluso la interacción con drones [10].

El control de los brazos robóticos se realiza a base de servomotores o motores de paso [11], para lo cual es necesario conocer las expresiones que relacionan las rotaciones de los mismos (llamados ángulos de control) con la posición de los diferentes elementos del brazo, principalmente del órgano de trabajo [12]. De modo similar, es importante realizar el llamado análisis inverso, con el cual se determinan los ángulos de control a partir de conocer la posición del brazo [13]. También es de vital importancia conocer las fuerzas [14] que actúan sobre el sistema, las cuales permiten no sólo realizar el diseño de sus componentes [15], sino también optimizarlo [16].

En el presente trabajo, se realizará el análisis cinemático, tanto directo como inverso, así como el análisis dinámico de un brazo robótico de barras, el cual se construirá como parte de una línea piloto, a escala, para el desarrollo y prueba de tecnologías de Industria 4.0.

2. Materiales y Métodos

El brazo robótico analizado, se moverá a base de mecanismos de barras (Figura 1), lo cual es recomendable para brazos ligeros ya que, aunque disminuye su rigidez, permite situar los motores de paso en la base, lo cual, a la larga, hace más liviano el diseño. El brazo contará con cuatro grados de libertad, cada uno controlado por un ángulo. El primer grado de libertad (ángulo θ) define la rotación del plano del brazo ($x'z$) alrededor del eje z . El segundo grado (ángulo φ), determina la rotación del primer segmento (OA) del brazo. El tercer grado de libertad (ángulo ϕ) establece la inclinación del segundo segmento (AB) del brazo. Finalmente, el cuarto grado de libertad (ángulo ψ), fija la inclinación del tercer segmento (BC) del brazo (donde se acopla el actuador). Todas las rotaciones están dadas sobre el eje horizontal (x').

Además de los elementos principales del brazo (OA, AB y BC), se tienen dos mecanismos para trasmitir el movimiento a los dos últimos: OD, DE y EA, para el elemento AB, y OF, FG, GA, AH, HI e IB, para el elemento BC. Nótese que las barras EA y AB están solidariamente unidas, por lo que EAB constituye un único elemento cinemático; lo mismo ocurre con las barras GA y AH, que conforman el elemento GAH, y con las barras IB y BC que conforman el elemento IBC. Las dimensiones de los elementos del brazo están dadas tal como se establecen en las relaciones siguientes:

$$OA = DE = FG = b; \quad (1a)$$

$$AB = HI = c; \quad (1b)$$

$$BC = d; \quad (1c)$$

$$OD = AE = p; \quad (1d)$$

$$OF = AG = q; \quad (1e)$$

$$AH = BI = r; \quad (1f)$$

de modo tal que OAED, OFGA y ABIH sean siempre paralelogramos. Además, los ángulos $\angle GAH = 90^\circ$, $\angle BAE = 180^\circ$ y $\angle CBI = 90^\circ$.

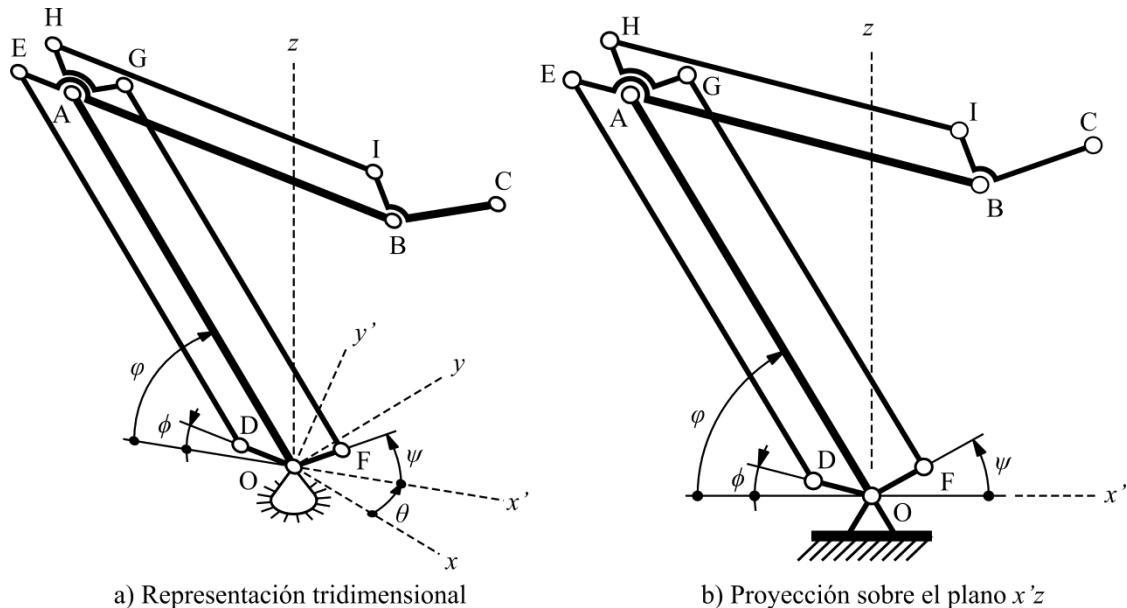


Fig.1 Esquema cinemático del brazo robótico

3. Resultados y Discusión

3.1 Análisis cinemático directo

Como primer paso, se determinan las posiciones de los puntos nodales del brazo, para valores establecidos de los ángulos φ , ϕ y ψ , sobre el plano $x'z$. La posición del punto A se determina utilizando la expresión de rotación del elemento OA sobre el eje y' :

$$\mathbf{r}'_A = \mathbf{y}'_O + \mathbf{r}'_{A/O} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi \\ 0 \\ b \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2)$$

Por su parte, la posición del punto D, se determina de modo análogo, con la rotación del elemento OD sobre dicho eje:

$$\mathbf{r}'_D = \mathbf{y}'_O + \mathbf{r}'_{D/O} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \cos \phi \\ 0 \\ p \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3)$$

Como los vectores OD y AE son iguales:

$$\mathbf{r}'_{E/A} = \mathbf{r}'_{D/O}$$

la posición del punto E se determina por la suma de vectores:

$$\mathbf{r}'_E = \mathbf{r}'_A + \mathbf{r}'_{E/A} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi \\ 0 \\ b \sin \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p \cos \phi \\ 0 \\ p \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi - p \cos \phi \\ 0 \\ b \sin \varphi + p \sin \phi \end{bmatrix} \quad (4)$$

Para calcular la posición del punto B, se determina el vector unitario en dirección AB:

$$\lambda'_{B/A} = -\lambda'_{E/A} = -\frac{\mathbf{r}'_{E/A}}{|\mathbf{r}'_{E/A}|} = -\frac{1}{p} \begin{bmatrix} -p \cos \phi \\ 0 \\ p \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ -\sin \phi \end{bmatrix}$$

con lo cual:

$$\mathbf{r}'_B = \mathbf{r}'_A + c\lambda'_{B/A} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi \\ 0 \\ b \sin \varphi \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ -\sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi + c \cos \phi \\ 0 \\ b \sin \varphi - c \sin \phi \end{bmatrix} \quad (5)$$

De forma similar, la posición del punto F se determina mediante la rotación del elemento OF sobre el eje y' :

$$\mathbf{r}'_F = \mathbf{r}'_O + \mathbf{r}'_{F/O} = \begin{bmatrix} \cos(-\psi) & 0 & -\sin(-\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\psi) & 0 & \cos(-\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \cos \psi \\ 0 \\ q \sin \psi \end{bmatrix} \quad (6)$$

Al ser, los elementos OF y AG, similares ($\mathbf{r}'_{F/O} = \mathbf{r}'_{F/O}$), la posición del punto G se calcula por suma de vectores, mediante la expresión:

$$\mathbf{r}'_G = \mathbf{r}'_A + \mathbf{r}'_{G/A} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi \\ 0 \\ b \sin \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \cos \psi \\ 0 \\ q \sin \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi + q \cos \psi \\ 0 \\ b \sin \varphi + q \sin \psi \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para la posición del punto H, se determina el vector unitario en dirección AH, rotando 90° sobre el eje y' , el vector unitario en dirección AG:

$$\lambda_{H/A} = \mathbf{R}_{y'}(-90^\circ) \frac{\mathbf{r}'_{G/A}}{|\mathbf{r}'_{G/A}|} = \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) \end{bmatrix} \left(\frac{1}{q} \right) \begin{bmatrix} q \cos \psi \\ 0 \\ q \sin \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \psi \\ 0 \\ \cos \psi \end{bmatrix} \quad (7)$$

con lo cual se calcula la posición de dicho punto:

$$\mathbf{r}'_H = \mathbf{r}'_A + q\lambda'_{H/A} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi \\ 0 \\ b \sin \varphi \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} -\sin \psi \\ 0 \\ \cos \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi - q \sin \psi \\ 0 \\ b \sin \varphi + q \cos \psi \end{bmatrix} \quad (8)$$

Finalmente, las posiciones de los puntos C e I se determinan a partir de la del punto B, utilizando las igualdades de los vectores unitarios ($\lambda'_{C/B} = \lambda'_{G/A}$ y $\lambda'_{I/B} = \lambda'_{H/A}$):

$$\mathbf{r}'_C = \mathbf{r}'_B + d\lambda'_{G/B} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi + c \cos \phi \\ 0 \\ b \sin \varphi - c \sin \phi \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} \cos \psi \\ 0 \\ \sin \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi + c \cos \phi + d \cos \psi \\ 0 \\ b \sin \varphi - c \sin \phi + d \sin \psi \end{bmatrix} \quad (9)$$

y

$$\mathbf{r}'_I = \mathbf{r}'_B + d\lambda'_{I/B} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi + c \cos \phi \\ 0 \\ b \sin \varphi - c \sin \phi \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -\sin \psi \\ 0 \\ \cos \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi + c \cos \phi - r \sin \psi \\ 0 \\ b \sin \varphi - c \sin \phi + r \cos \psi \end{bmatrix} \quad (10)$$

Una vez determinadas las posiciones de todos los puntos, sobre el plano $x'z$, se calculan las correspondientes, sobre el sistema de coordenadas xyz , mediante la rotación de sus vectores sobre el eje z, un ángulo $-\theta$, cuya matriz operacional:

$$\mathbf{R}_z(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

con lo que las posiciones resultan:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{R}_z(-\theta)\mathbf{r}'_A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \cos \varphi \\ 0 \\ b \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \cos \varphi \cos \theta \\ -b \cos \varphi \sin \theta \\ b \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{R}_z(-\theta)\mathbf{r}'_B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \cos \varphi + c \cos \phi \\ 0 \\ b \sin \varphi - c \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-b \cos \varphi + c \cos \phi) \cos \theta \\ (-b \cos \varphi + c \cos \phi) \sin \theta \\ b \sin \varphi - c \sin \phi \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C = \mathbf{R}_z(-\theta)\mathbf{r}'_C &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \cos \varphi + c \cos \phi + d \cos \psi \\ 0 \\ b \sin \varphi - c \sin \phi + d \sin \psi \end{bmatrix} = \dots \\ &\dots = \begin{bmatrix} (-b \cos \varphi + c \cos \phi + d \cos \psi) \cos \theta \\ (-b \cos \varphi + c \cos \phi + d \cos \psi) \sin \theta \\ b \sin \varphi - c \sin \phi + d \sin \psi \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{r}_D = \mathbf{R}_z(-\theta)\mathbf{r}'_D = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \cos \phi \\ 0 \\ p \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \cos \phi \cos \theta \\ -p \cos \phi \sin \theta \\ p \sin \phi \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{R}_z(-\theta)\mathbf{r}'_E = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b\cos\varphi - p\cos\phi \\ 0 \\ b\sin\varphi + p\sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-b\cos\varphi - p\cos\phi)\cos\theta \\ (-b\cos\varphi - p\cos\phi)\sin\theta \\ b\sin\varphi + p\sin\phi \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{r}_F = \mathbf{R}_z(-\theta)\mathbf{r}'_F = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q\cos\psi \\ 0 \\ q\sin\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q\cos\psi\cos\theta \\ q\cos\psi\sin\theta \\ q\sin\psi \end{bmatrix} \quad (17)$$

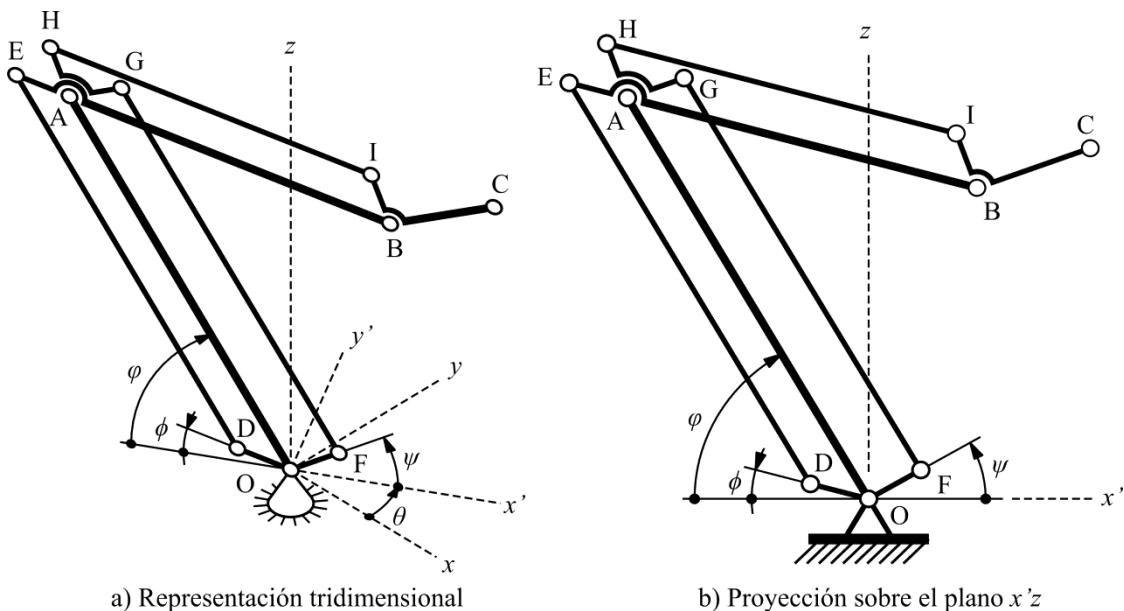
$$\mathbf{r}_G = \mathbf{R}_z(-\theta)\mathbf{r}'_G = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b\cos\varphi + q\cos\psi \\ 0 \\ b\sin\varphi + q\sin\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-b\cos\varphi + q\cos\psi)\cos\theta \\ (-b\cos\varphi + q\cos\psi)\sin\theta \\ b\sin\varphi + q\sin\psi \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{r}_H = \mathbf{R}_z(-\theta)\mathbf{r}'_H = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b\cos\varphi - r\sin\psi \\ 0 \\ b\sin\varphi + r\cos\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-b\cos\varphi - r\sin\psi)\cos\theta \\ (-b\cos\varphi - r\sin\psi)\sin\theta \\ b\sin\varphi + r\cos\psi \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{r}_I = \mathbf{R}_z(-\theta)\mathbf{r}'_I = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b\cos\varphi + c\cos\phi - r\sin\psi \\ 0 \\ b\sin\varphi - c\sin\phi + r\cos\psi \end{bmatrix} = \dots$$

... = $\begin{bmatrix} (-b\cos\varphi + c\cos\phi - r\sin\psi)\cos\theta \\ (-b\cos\varphi + c\cos\phi - r\sin\psi)\sin\theta \\ b\sin\varphi - c\sin\phi + r\cos\psi \end{bmatrix}$.

(20)



a) Representación tridimensional

b) Proyección sobre el plano $x'z'$ **Fig.2.** Posiciones calculadas para cuatro conjuntos de ángulos de control

Con el objetivo de verificar las expresiones obtenidas, se implementó el correspondiente código en MATLAB, obteniendo las representaciones gráficas de las posiciones de los elementos del brazo, para diferentes valores de los ángulos de control. En la Figura 2 se muestran cuatro conjuntos de ángulos de control, con valores de las dimensiones $b = 200$ mm, $c = 150$ mm, $d = 50$ mm, y $p = q = r = 30$ mm; de valores simulados.

3.2 Análisis cinemático inverso

El propósito del análisis inverso es determinar los ángulos de posición, θ , φ y ψ , correspondiente a un punto dado del espacio, $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, cuyas coordenadas, junto al ángulo de inclinación del actuador, ψ , constituyen los parámetros de trabajo del brazo.

El primer ángulo determinado es el de posición sobre el eje z:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \begin{bmatrix} (-b \cos \varphi + c \cos \phi + d \cos \psi) \cos \theta \\ (-b \cos \varphi + c \cos \phi + d \cos \psi) \sin \theta \\ b \sin \varphi - c \sin \phi + d \sin \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_0 \\ \frac{(-b \cos \varphi + c \cos \phi + d \cos \psi) \sin \theta}{(-b \cos \varphi + c \cos \phi + d \cos \psi) \cos \theta} &= \frac{y_0}{x_0} \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{y_0}{x_0} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

A continuación, se calcula la posición del punto B, a partir del C:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B &= \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_{C/B} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} (-b \cos \varphi + c \cos \phi + d \cos \psi) \cos \theta \\ (-b \cos \varphi + c \cos \phi + d \cos \psi) \sin \theta \\ b \sin \varphi - c \sin \phi + d \sin \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-b \cos \varphi + c \cos \phi) \cos \theta \\ (-b \cos \varphi + c \cos \phi) \sin \theta \\ b \sin \varphi - c \sin \phi \end{bmatrix} \right) \\ \mathbf{r}_B &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \cos \psi \cos \theta \\ d \cos \psi \sin \theta \\ d \sin \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 - d \cos \psi \cos \theta \\ y_0 - d \cos \psi \sin \theta \\ z_0 - d \sin \psi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

Por su parte, los ángulos φ y ϕ se determinan a partir de las longitudes de los segmentos $OA = b$, $AB = c$ y $BO = t$, del triángulo imaginario OAB (Fig. 3). En este último, la dimensión t es igual a:

$$t = \|\mathbf{r}_B\| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} \quad (23)$$

mientras que el ángulo λ , del segmento OB con el plano xy, es:

$$\lambda = \sin^{-1} \left(z_B / \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} \right) \quad (24)$$

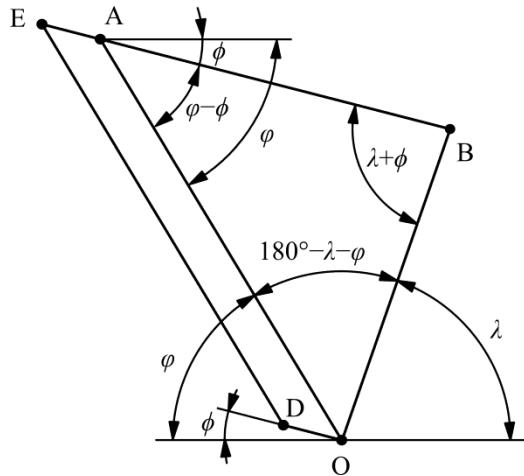


Fig.3 Ángulos y dimensiones del triángulo imaginario OAB

Aplicando entonces la ley del coseno:

$$b^2 = c^2 + t^2 - 2ct \cos(\lambda + \phi);$$

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{c^2 + t^2 - b^2}{2ct} \right) - \lambda.$$

Finalmente, el ángulo ϕ se determina aplicando la ley del seno:

$$\frac{t}{\sin(\phi - \lambda)} = \frac{b}{\sin(\lambda + \phi)}$$

$$\phi = \lambda + \sin^{-1} \left[\frac{t \sin(\lambda + \phi)}{b} \right]. \quad (26)$$

3.3 Análisis dinámico

El análisis dinámico del brazo robótico se llevó a cabo despreciando la masa de sus componentes, con respecto a la carga, lo cual es aceptable como una primera aproximación, para realizar un diseño preliminar de sus componentes. Con ese mismo propósito, sólo se consideraron las fuerzas en el plano $x'z$.

Para determinar las fuerzas, a partir de la existencia de una carga W , en el actuador (punto C), se realizan los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los componentes (ver Figura 4).

Para el elemento IBC (Fig. 4a), las ecuaciones de equilibrio estático toman la forma:

$$\sum \mathbf{M}^{(B)} = \mathbf{r}_{IB} \times \mathbf{F}_I + \mathbf{r}_{C/B} \times \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (27a)$$

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_C + \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (27b)$$

cuya solución lleva a:

$$\mathbf{F}_I = -\frac{d}{r} \frac{\cos \varphi \cos \phi}{\cos(\varphi + \phi)} W \mathbf{i}' + \frac{d}{r} \frac{\cos \varphi \sin \phi}{\cos(\varphi + \phi)} W \mathbf{k} \quad (28a)$$

$$\mathbf{F}_B = \frac{d}{r} \frac{\cos \varphi \cos \phi}{\cos(\varphi + \phi)} W \mathbf{i}' + \left[1 - \frac{d}{r} \frac{\cos \varphi \sin \phi}{\cos(\varphi + \phi)} \right] W \mathbf{k} \quad (28b)$$

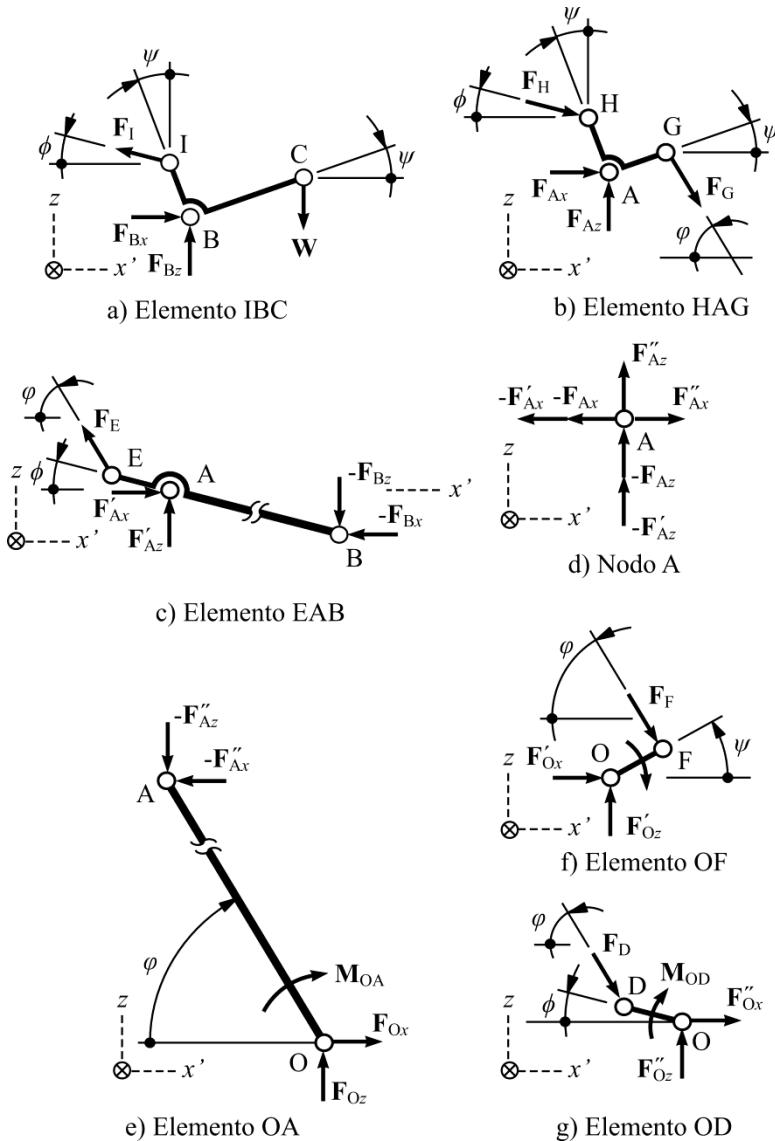


Fig.4 Diagramas de cuerpo libre de cada uno de los componentes del brazo robótico

Por su parte, para el elemento HAG (Fig. 4b) las ecuaciones de equilibrio toman la forma:

$$\sum \mathbf{M}^{(A)} = \mathbf{r}_{H/A} \times \mathbf{F}_H + \mathbf{r}_{G/A} \times \mathbf{F}_G = \mathbf{0}; \text{ y} \quad (29a)$$

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_H + \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_A = \mathbf{0}. \quad (29b)$$

Dado que $\mathbf{F}_H = -\mathbf{F}_I$, la solución de las ecuaciones anteriores lleva a las expresiones:

$$\mathbf{F}_G = -\frac{d}{q} \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin(\varphi + \psi)} W \mathbf{i}' + \frac{d}{r} \frac{\sin \varphi \cos \psi}{\sin(\varphi + \psi)} W \mathbf{k} \quad (30a)$$

$$\mathbf{F}_A = -\frac{2d}{r} \frac{\cos \phi \cos \psi}{\cos(\phi + \psi)} W \mathbf{i}' + \frac{2d}{r} \frac{\sin \phi \cos \psi}{\cos(\phi + \psi)} W \mathbf{k} \quad (30b)$$

Para el siguiente elemento EAB (Fig. 4c), se plantean las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\sum \mathbf{M}^{(A)} = \mathbf{r}_{E/A} \times \mathbf{F}_E - \mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B = \mathbf{0}; \text{ y} \quad (31a)$$

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}'_A - \mathbf{F}_B = \mathbf{0} \quad (31b)$$

cuya solución lleva a las expresiones:

$$\mathbf{F}_E = \frac{c}{p} \frac{\cos \varphi \cos \phi}{\sin(\varphi - \phi)} W \mathbf{i}' - \frac{c}{p} \frac{\sin \varphi \cos \phi}{\sin(\varphi - \phi)} W \mathbf{k} \quad (32a)$$

$$\mathbf{F}'_A = \left[\frac{d}{r} \frac{\cos \phi \cos \psi}{\cos(\phi + \psi)} - \frac{c}{p} \frac{\cos \varphi \cos \phi}{\sin(\varphi - \phi)} \right] W \mathbf{i}' + \left[1 - \frac{d}{r} \frac{\sin \phi \cos \psi}{\cos(\phi + \psi)} + \frac{c}{p} \frac{\sin \varphi \cos \phi}{\sin(\varphi - \phi)} \right] W \mathbf{k} \quad (32b)$$

Para determinar el valor de la fuerza que actúa sobre el punto A en el elemento OA, \mathbf{F}''_A , se analiza el equilibrio en el nodo A (Fig. 4d):

$$\sum \mathbf{F} = -\mathbf{F}_A - \mathbf{F}'_A - \mathbf{F}''_A = \mathbf{0} \quad (33)$$

que da, como resultado, la expresión:

$$\mathbf{F}''_A = -\left[\frac{d}{r} \frac{\cos \phi \cos \psi}{\cos(\phi + \psi)} + \frac{c}{p} \frac{\cos \varphi \cos \phi}{\sin(\varphi - \phi)} \right] W \mathbf{i}' + \left[1 + \frac{d}{r} \frac{\sin \phi \cos \psi}{\cos(\phi + \psi)} + \frac{c}{p} \frac{\sin \varphi \cos \phi}{\sin(\varphi - \phi)} \right] W \mathbf{k} \quad (34)$$

Para el elemento OA (Fig. 4e), se plantean las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\sum \mathbf{M}^{(O)} = \mathbf{M}_{OA} - \mathbf{r}_{A/O} \times \mathbf{F}''_A = \mathbf{0}; \text{ y} \quad (35a)$$

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_O - \mathbf{F}''_A = \mathbf{0} \quad (35b)$$

cuya solución lleva a las expresiones:

$$\mathbf{M}_{OA} = \left[\cos \varphi + \frac{d}{r} \frac{\sin(\phi - \varphi) \cos \psi}{\cos(\phi + \psi)} \right] W d \mathbf{j}' \quad (36a)$$

$$\mathbf{F}_O = -\left[\frac{d}{r} \frac{\cos \phi \cos \psi}{\cos(\phi + \psi)} + \frac{c}{p} \frac{\cos \varphi \cos \phi}{\sin(\varphi - \phi)} \right] W \mathbf{i}' + \left[1 + \frac{d}{r} \frac{\sin \phi \cos \psi}{\cos(\phi + \psi)} + \frac{c}{p} \frac{\sin \varphi \cos \phi}{\sin(\varphi - \phi)} \right] W \mathbf{k} \quad (36b)$$

El análisis del elemento OF (Fig. 4f), conduce a las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\sum \mathbf{M}_O^{(OF)} = \mathbf{M}_{OF} + \mathbf{r}_{F/O} \times \mathbf{F}_F = \mathbf{0}; \text{ y} \quad (37a)$$

$$\sum \mathbf{F}^{(OF)} = \mathbf{F}'_O + \mathbf{F}_F = \mathbf{0} \quad (37b)$$

cuya solución, teniendo en cuenta que $\mathbf{F}_F = -\mathbf{F}_G$, conlleva a las expresiones:

$$\mathbf{M}_{OF} = -\cos \psi W d \mathbf{j}' \quad (38a)$$

$$\mathbf{F}'_O = -\frac{d}{q} \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\cos(\varphi + \psi)} W \mathbf{i}' + \frac{d}{q} \frac{\sin \varphi \cos \psi}{\cos(\varphi + \psi)} W \mathbf{k} \quad (38b)$$

Finalmente, para el elemento OD, se obtienen las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum \mathbf{M}_O^{(OD)} = \mathbf{M}_{OD} + \mathbf{r}_{D/O} \times \mathbf{F}_D = \mathbf{0}; \text{ y} \quad (39a)$$

$$\sum \mathbf{F}^{(OD)} = \mathbf{F}''_O + \mathbf{F}_D = \mathbf{0} \quad (39b)$$

las cuales se resuelven, obteniéndose las expresiones:

$$\mathbf{M}_{OD} = -\cos \phi W c \mathbf{j}' \quad (40a)$$

$$\mathbf{F}''_O = \frac{c}{p} \frac{\cos \varphi \cos \phi}{\sin(\varphi - \phi)} W \mathbf{i}' + \frac{c}{p} \frac{\sin \varphi \cos \phi}{\sin(\varphi - \phi)} W \mathbf{k} \quad (40b)$$

3.4 Simulación

Con el objetivo de verificar las expresiones obtenidas, se realizó una simulación, para lo cual se implementó el código correspondiente en MATLAB. El movimiento simulado, consistió en un desplazamiento lineal desde el punto $\mathbf{P}_1 = \{0; 200; 0\}$ mm hasta $\mathbf{P}_2 = \{100, 200, 150\}$ mm, simultáneamente con la rotación del órgano de trabajo, desde $\psi_1 = -90^\circ$ hasta $\psi_2 = 0^\circ$.

En la Figura 4 se pueden observar los valores de los ángulos de control, durante todo el desplazamiento, el cual se dividió en 50 pasos. Como se puede observar, los ángulos θ y ψ tienen una variación lineal, mientras que los dos restantes, ϕ y φ , no se comportan linealmente, lo que viene dado por la relación que tienen con la posición del punto de trabajo.

De forma similar, se determinó, para este movimiento, los valores de torque (momento) necesario en los motores que generan las rotaciones de los elementos OA, OD y OF, considerando una carga de 1 kg ($W = 9,81$ N). Como se puede observar en la Figura 5, en ningún caso el comportamiento es lineal, con los mayores valores correspondiendo al torque sobre el elemento OA.

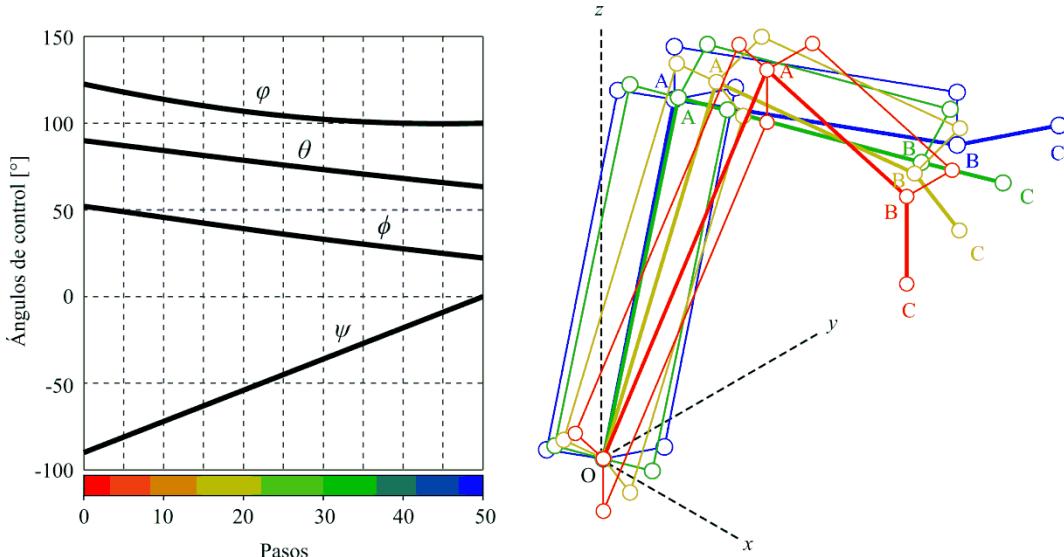


Fig.5 Representación gráfica de la simulación cinemática

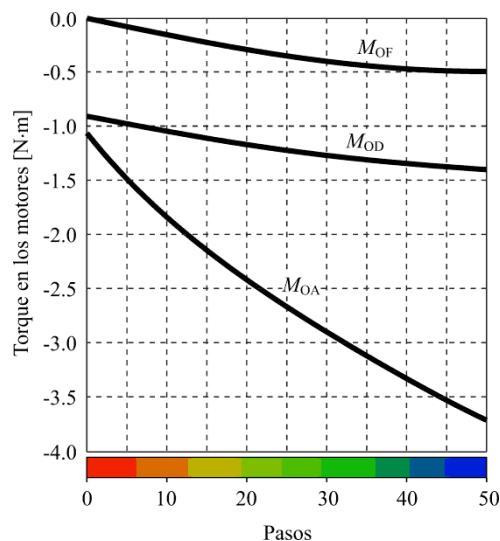


Fig.6 Representación gráfica de la simulación dinámica

4. Conclusiones

Las expresiones obtenidas permiten, en primer lugar, calcular las posiciones de todos los puntos del brazo robótico, a partir de los cuatro ángulos de control. De forma similar, el análisis reverso permitió la determinación de los ángulos de control, a partir de la posición y el ángulo del órgano de trabajo. Es importante notar que las relaciones obtenidas fueron no lineales en su mayoría, lo que implica una mayor complejidad en las relaciones cinemáticas, a la hora de lograr desplazamientos uniformes. De forma similar, se obtuvieron las expresiones de las fuerzas y momentos actuantes en cada elemento del sistema. El análisis realizado posibilitará la programación de los movimientos del brazo robótico, en combinación con su diseño electrónico y lógico. Permitirá, además, realizar diseño preliminar de cada uno de sus componentes, lo que constituye el paso siguiente de esta investigación. También, como un desarrollo futuro del presente trabajo, se puede realizar la optimización de las trayectorias, teniendo en cuenta la precisión y suavidad de los movimientos a lograr.

Referencias

1. Bi, Z.M., Miao, Z., Zhang, B., Zhang, C.W.J., *The state of the art of testing standards for integrated robotic systems*. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2020. **63**: p. 101893. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2019.101893>.
2. Ribeiro, J., Lima, R., Eckhardt, T., Paiva, S., *Robotic process automation and artificial intelligence in Industry 4.0: A Literature review*. Procedia Computer Science, 2021: **181**: p. 51-58. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2021.01.104>.
3. Al-Qahtani, H.M., Mohammed, A.A., Sunar, M., *Dynamics and control of a robotic arm having four links*. Arabian Journal for Science and Engineering, 2017. **42**(5): p. 1841-1852. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13369-016-2324-y>.
4. Matulis, M., Harvey, C., *A robot arm digital twin utilizing reinforcement learning*. Computers and Graphics, 2021. **95**: p. 106-114. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cag.2021.01.011>.
5. Evliyaoglu, K. O., Elitas, M., *Design and development of a self-adaptive, reconfigurable and low-cost robotic arm*. En: Zhang, D., Wei, B., (Eds.) *Mechatronics and Robotics Engineering for Advanced and Intelligent Manufacturing*, 2017. Cham (Switzerland): Springer. ISBN: 978-3-319-33581-0.
6. Daniyan, I. Mpofu, K., Ramasetse, B., Adeodu, A., *Design and simulation of a robotic arm for manufacturing operations in the railcar industry*. Procedia Manufacturing, 2020. **51**: p. 67-72. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2020.10.011>.
7. Hofer, M., D'Andrea, R., *Design, fabrication, modeling and control of a fabric-based spherical robotic arm*. Mechatronics, 2020. **68**: 102369. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2020.102369>.
8. Sun, X., Okamoto, J., Masamune, K., Muragaki, Y., *Robotic technology in operating rooms: A review*. Current Robotics Reports, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1007/s43154-021-00055-4>.
9. Paradkar, V., Raheman, H., Rahul, K., *Development of a metering mechanism with serial robotic arm for handling paper pot seedlings in a vegetable transplanter*. Artificial Intelligence in Agriculture, 2021. **5**: p. 52-63. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aiia.2021.02.001>.
10. Ramalepa, L. P., Jamisola, R. S., *A review on cooperative robotic arms with mobile or drones bases*. International Journal of Automation and Computing, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11633-021-1299-7>.
11. De Jesús Rubio, J., Serrano, J., Figueroa, M., Aguilar-Ibañez, C. F., *Dynamic model with sensor and actuator for an articulated robotic arm*. Neural Computing and Applications, 2014. **24**(3): p. 573-581. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00521-012-1259-9>.
12. Xu, L., *Remote control and monitoring system of robotic arm using Raspberry Pi*. En: Deng, K., Yu, Z., Patnaik, S., Wang, J., (Eds.), *Recent Developments in Mechatronics and Intelligent Robotics*, 2019. Cham (Switzerland): Springer. ISBN: 978-3-030-00214-5.
13. Siemasz, R., Tomczuk, K., Malecha, Z., *3D printed robotic arm with elements of artificial intelligence*. Procedia Computer Science, 2020. **176**: p. 3741-3750. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.09.013>.
14. Renuka, K., Bhuvanesh, N., Reena, C. J., *Kinematic and dynamic modelling and PID control of three degree-of-freedom robotic arm*. (Eds.) *Advances in Materials Research*. Springer Proceedings in Materials, 2021. Singapore: Springer. ISBN: 978-981-15-8319-3.
15. Barbieri, L., Bruno, F., Gallo, A., Muzzupappa, M., Russo, M. L., *Design, prototyping and testing of a modular small-sized underwater robotic arm controlled through a Master-Slave approach*. Ocean Engineering, 2018. **158**: p. 253-262. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.04.032>.
16. Bugday, M., Karali, M., *Design optimization of industrial robot arm to minimize redundant weight*. Engineering Science and Technology, an International Journal, 2019. **22**(1): p. 346-352. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2018.11.009>.

Agradecimientos

Este trabajo es un resultado parcial del proyecto *Arquitectura ligera, abierta e inteligente para la introducción de funcionalidades de Industria 4.0 en entornos productivos*, asociado al Programa Nacional de Robótica, Automática e Inteligencia Artificial.

Conflictos de Intereses

Los autores no tienen conocimiento de ningún conflicto de interés.

Contribución de los autores

Ramón Quiza. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1293-6044>

Participó en el diseño de la investigación, en los análisis cinemático y dinámico y en la redacción del manuscrito.

Teresa Pérez Sosa. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5587-4624>

Participó en los análisis cinemático y dinámico, en la elaboración de los gráficos y en la redacción del manuscrito.

Renier Fagundo Mesa. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7192-8792>

Participó en la simulación computacional y en la redacción del manuscrito.