

Análisis transiente usando un esquema multidireccional

Transient analysis using a scheme multidireccional

John Andrew Twyman Quilodrán¹

Universidad Católica de Chile

Correo electrónico: john@twyman.cl

Este documento posee una licencia Creative Commons Reconocimiento/No Comercial 4.0 Internacional 

Recibido: 24 de mayo de 2018 Aprobado: 3 de diciembre de 2018

Resumen

Se presenta un nuevo enfoque para la solución numérica del golpe de ariete mediante un esquema multidireccional (o Método Híbrido, MH) que combina las ventajas del Método de las Características (MC), de carácter explícito, con el Método de Preissman (MDFI), de carácter implícito. El MH resuelve el flujo transiente en una red de tuberías tramo a tramo, aplicando el MC en aquellos tramos con número de Courant igual o aproximadamente igual a 1, y el MDFI en los tramos con Courant menor que 1. Esto es posible debido a una ecuación de compatibilidad que permite desacoplar la red en sus nodos de borde manteniendo la continuidad de caudal y la presión en cada nodo. Esta cualidad ayuda a reducir el tamaño del sistema de ecuaciones del MDFI a una cantidad proporcional a la cantidad de subtramos que tenga cada tramo con Courant menor que 1. Se presentan las ecuaciones que definen al algoritmo junto con sus ventajas en relación al MC tradicional al resolver el flujo transiente en una red simple. Se verifica que el MH es tan rápido como el MC, aunque mucho más preciso y estable cuando Courant es menor que 1.

Palabras claves: esquema multidireccional, golpe de ariete, método de las características, método de diferencias finitas implícito, red de tuberías

Abstract

The hazard A new multidirectional scheme (also called Hybrid Method or HM) for the water hammer's numerical solution is presented. HM combines the advantages of the Method of Characteristics (MOC) with the Method of Preissman (IFDM). HM solves pipe-by-pipe the transient flow in a piping system by applying the MOC in the pipes with Courant number equal or approximately equal to 1, and applying the IFDM in the pipes with Courant lower than 1. This is possible due to a compatibility equation that decouples the pipe network in their boundary nodes, maintaining the flow continuity and the pressure at each node. This feature helps to reduce the system of equations size to an amount which is proportional to the number of reaches of each pipe with Courant lower than 1. The equations that define HM's algorithm, along with its advantages in relation to the traditional MOC, are presented. It verified that HM is as fast as the MOC though much more accurate and stable when the transient flow is solved in a simple pipe network with a Courant lower than 1.

Key words: implicit finite differences method, method of characteristics, multidirectional scheme, pipe network, water hammer

INTRODUCCIÓN

Existe un amplio espectro de metodologías numéricas ideadas para resolver el golpe de ariete en redes de tuberías, las cuales pueden ser englobadas en las siguientes categorías [1]: Método de las Características (MC); Método de la Onda Característica (MOC), conocido actualmente como el Método de la Onda (MO); Método de Diferencias Finitas (MDF), Método de Elementos Finitos (MEF) y Métodos Híbridos (MH). Estas metodologías pueden ser explícitas cuando las variables de estado Q (caudal) y H (cota piezométrica) son calculadas a partir de valores conocidos en el paso de tiempo anterior, o implícitas cuando Q y H se calculan a partir de la construcción y solución de un sistema de ecuaciones. Además, dependiendo de la forma cómo se calculan dichas variables entre los nodos de borde de cada tubería (donde se ubican los estanques, válvulas, bombas, etc.), el esquema numérico puede ser de tipo Euleriano, como por ejemplo, el MC aplicado en una malla espacio-tiempo ($x-t$); o puede ser de tipo Lagrangiano, como el MO, donde la perturbación se refleja a partir de la mecánica de la onda de presión [2]. Sin embargo, hay escasa literatura relativa a la aplicación de métodos híbridos (MH) para el análisis del golpe de ariete en redes de tuberías. Un MH consiste en un esquema numérico de tipo multidireccional [3] que combina dos o más de los algoritmos mencionados anteriormente para, en lo posible, conservar las ventajas y reducir las desventajas que puedan tener al ser aplicados por separado, buscando un efecto sinérgico [4]. Watt *et al* [5] plantean un esquema de tipo híbrido que combina las técnicas de elementos finitos y de diferencias finitas, consiguiendo un método numéricamente estable aunque ineficiente debido a la capacidad de memoria requerida. Karney [6] y Karney y McInnis [7], en el contexto del MC con intervalos de tiempo prefijados, utiliza el Método de Diferencias Finitas para eliminar los tubos cortos de una red compleja, incrementando así los intervalos de tiempo y reduciendo la carga computacional. Chaudhry [8], usando el Esquema Difusivo, recurre al Método de las Características (MC) para suplir la carencia de una ecuación en las secciones de borde (aparte de la condición de borde misma). Twyman [4] plantea un esquema numérico de tipo híbrido que combina el MC y el Método de Diferencias Finitas Implícitas de Preissman (también conocido como MDFI o Método de los 4 puntos) para resolver Q y H en los nodos de borde e interiores, respectivamente, el cual presenta mayor flexibilidad y robustez que el MC y el MDFI, particularmente cuando el número de Courant (C_n) es distinto de 1, tal como es reconocido por Kim [9]. Twyman [10] plantea varios esquemas híbridos flexibles basados en el MC, MDFI y una versión explícita de Preissman, los cuales adecúan la forma del reticulado $x-t$ en orden a conseguir mayor precisión y estabilidad numérica independientemente del C_n adoptado. En el presente trabajo se presenta un esquema numérico híbrido original que, a diferencia de los esquemas mencionados anteriormente, que resuelven aplicando un solo esquema de solución a los tramos de la red, se caracteriza por resolver cada tramo del sistema de acuerdo al MC o al MDFI dependiendo del C_n que tenga asignado, todo a partir de una ecuación de compatibilidad que permite desacoplar cada tubería en sus nodos de borde. Luego, si $C_n < 1$, el tramo es resuelto usando el MDFI; si $C_n = 1$ (o $C_n \approx 1$), es resuelto aplicando el MC. Esto permite resolver de forma óptima la red, disminuyendo notablemente el tamaño del sistema de ecuaciones en los tramos con $C_n < 1$ (al quedar supeditado sólo a la cantidad de sub-tramos que tenga), reduciendo además la atenuación numérica que aparece cuando la tubería con $C_n < 1$ es resuelta aplicando sólo el MC.

MATERIALES Y MÉTODOS

Si se considera un volumen de control en la tubería de tamaño infinitesimalmente pequeño, de longitud dx , el fenómeno impermanente queda descrito completamente por un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales, formado por las ecuaciones de la dinámica (segunda ley de Newton) y de continuidad (conservación de la masa), siendo estas [8]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (1)$$

$$a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

donde

∂ : Derivada parcial.

H : Cota piezométrica.

α : Velocidad de la onda.

g : Constante de gravedad.

A : Sección transversal de la tubería.

Q : Caudal.

f : Factor de fricción (Darcy-Weisbach).

D : Diámetro de la tubería.

Los subíndices x y t denotan las dimensiones espacial y temporal, respectivamente. El sistema compuesto por las ecuaciones (1) y (2) es el normalmente utilizado en la modelación numérica, entregando la variación temporal y espacial de las variables de estado (cota piezométrica y caudal). El sistema compuesto por (1) y (2) carece de una solución analítica y debe ser resuelto numéricamente, con la ayuda del ordenador. El MDFI consiste en un método numérico que resuelve el flujo transiente en redes de distribución de agua mediante la generación de sistemas de ecuaciones lineales (o no lineales) dependiendo de la forma que se adopte para el término friccional en la ecuación de la dinámica. En general, trabaja considerando un gran sistema de ecuaciones que engloba todos los tramos y condiciones de borde de la red, llegando finalmente a un sistema de ecuaciones configurado como $A \cdot x = b$, que debe ser resuelto en cada paso de tiempo, constituyendo la solución obtenida una condición inicial para el próximo paso, esto hasta completar el tiempo máximo de simulación establecido. El tamaño del sistema de ecuaciones, en cada paso de tiempo, dependerá del número de tramos (NT) y de nodos de la red (NN), por lo que la dimensión mínima queda definida como $2 \cdot (NT + NN)$, ya que debe aplicarse en cada tramo (suponiendo $N = 1$) el sistema conformado por las ecuaciones de dinámica y continuidad, junto con las ecuaciones que expresen la continuidad de caudal y la unicidad de la cota piezométrica en los nodos de borde. El MDFI puede ser bastante estable, aunque posee la desventaja de su poca facilidad para trabajar con las condiciones de borde complejas, lo que ha dificultado su desarrollo. El MDFI más usado en la modelación transiente es el denominado Esquema de los Cuatro Puntos (o Método de Preissman), el que discretiza las ecuaciones de la dinámica y de continuidad para el subtramo $i / i+1$ como sigue [8]:

$$d_1 Q_p^i + d_2 Q_p^{i+1} - d_3 H_p^i + d_3 H_p^{i+1} = -d_4 \quad (3)$$

$$-c_1 Q_p^i + c_1 Q_p^{i+1} + c_2 H_p^i + c_3 H_p^{i+1} = -c_4 \quad (4)$$

Donde Q_p y H_p son el caudal y presión en la sección i o $i+1$, respectivamente, según sea el caso. Los coeficientes c_i y d_i son constantes que dependen de características conocidas del escurrimiento, de la red o del esquema numérico. Todos los coeficientes anteriores pueden ser diferentes de un tramo a otro e inclusive dentro de un mismo tramo. El sistema de ecuaciones formado por (3) y (4) constituye un sistema de dos ecuaciones en cuatro incógnitas, las que deben acoplarse a las de los restantes tramos y condiciones de borde dentro de un sistema de ecuaciones de tipo lineal [4]. El Método de las Características (MC) ha sido el método explícito más usado en el flujo impermanente en tuberías debido principalmente a la facilidad para introducir diferentes dispositivos y condiciones de borde (bombas, válvulas, estanques, etc.). Sin embargo, como todo método explícito, adolece de restricciones desde el punto de vista de su estabilidad y convergencia numérica, siendo la principal aquella asociada con el número de Courant o C_n [8]. Destaca por su mayor predominio el MC en la modalidad de los intervalos de tiempo preespecificados [6,7], el cual calcula explícitamente los valores de las variables de estado en secciones intermedias de la discretización mediante la intersección de las ecuaciones características positiva C^+ ($H_p = C_p - B_p \cdot Q_p$) y negativa C^- ($H_p = C_m + B_m \cdot Q_p$), respectivamente, lo cual lleva a la siguiente solución (cuando $B = B_p = B_m$):

$$H_p = \frac{C_p + C_m}{2} \quad (5)$$

$$Q_P = \frac{C_P - C_M}{2B} \tag{6}$$

Los coeficientes B , C_P y C_M son constantes conocidas que dependen de las características físicas del tramo o del valor de las variables de estado en el tiempo previo. En las secciones de los extremos se requiere de una ecuación de borde adicional, la que debe resolverse conjuntamente con C^- o C^+ , según se trate de la primera o última sección de la subdivisión, respectivamente. El cálculo se inicia a partir de una situación inicial conocida, generalmente flujo permanente. Karney [6] y Karney y McInnis [7] presentan un sistema generalizado de condiciones de borde dentro del contexto del MC, apto para ser usado en sistemas complejos de tuberías, con dispositivos de control de golpe de ariete, conectados a nodos (estanques principalmente) y en línea (tramos, válvulas, bombas, etc.). Suponiendo que el nodo carece de pérdida de carga singular y almacenamiento, la ecuación de compatibilidad que liga a todos los tramos, consumos o estanques conectados al nudo es:

$$H_P = C_c - B_c \cdot Q_{ext} \tag{7}$$

Con C_c y B_c , constantes conocidas y Q_{ext} , caudal (o consumo nodal), positivo si tiene sentido saliendo del nudo, negativo en caso contrario, y cuyo valor puede ser constante, función del tiempo o de alguna relación constitutiva (por ejemplo, de la ecuación politrópica). La ecuación (7) implica que una red muy compleja puede ser *desacoplada* o *desarticulada* en cada nodo, siempre y cuando se agregue como condición de borde una ecuación de compatibilidad (la ecuación 7) que restituya la continuidad de caudales y la unicidad de la cota piezométrica en cada nodo. Esta propiedad permite simplificar notablemente el tratamiento de las redes de conectividad compleja dentro del contexto del MC, aunque también permite tratar la red tramo a tramo, quedando estos susceptibles de ser resueltos mediante distintos métodos numéricos [4]. El Método Híbrido (MH) que se propone en este trabajo busca explotar al máximo las características de la ecuación (7) con la idea de conseguir aprovechar el desacople de la red en cada nodo de borde, con el objetivo de facilitar el análisis de la red tramo a tramo según distintos esquemas numéricos (figura 1).

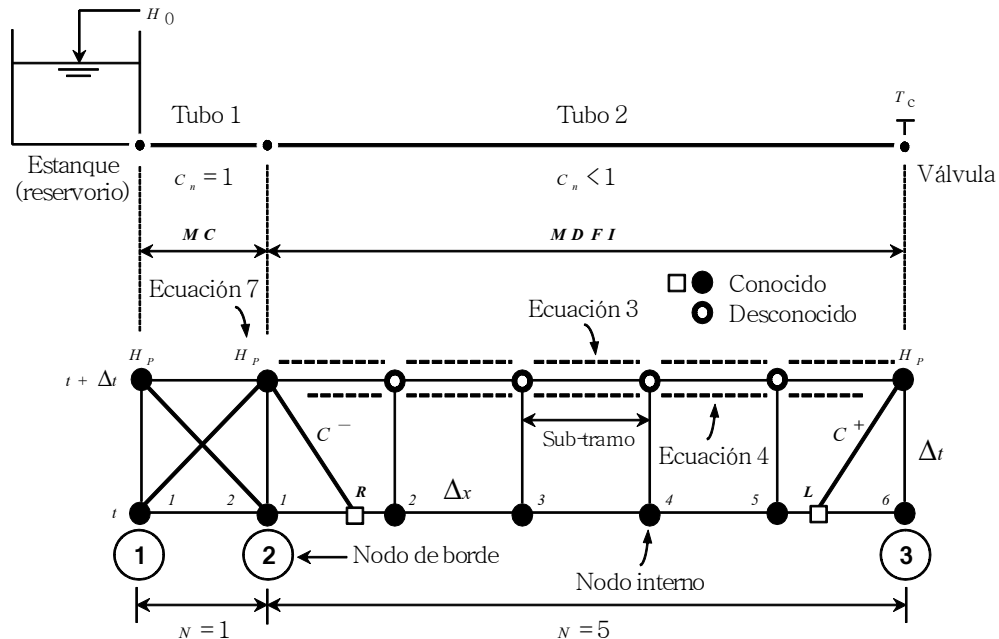


Fig. 1. Esquema de la red y ecuaciones involucradas en el Método Híbrido (MH) propuesto

Con fines ilustrativos, la figura 1 muestra un esquema de la red compuesta por dos tramos, junto con las ecuaciones involucradas en el MH. A partir de las características físicas de cada tramo, junto con la discretización adoptada para la malla espacio-tiempo ($x-t$), es posible aplicar el MC sobre aquellos tramos con $C_n = 1$ (o $C_n \approx 1$) y el MDFI sobre los restantes tramos, todos ellos con $C_n < 1$. Con esto se puede garantizar la estabilidad del algoritmo atenuando de paso el efecto de la dispersión numérica asociada con el $C_n < 1$, esto porque aquellos tramos con MC tendrán un $C_n = 1$, con lo cual cumplirán con su condición de estabilidad y convergencia; los demás tramos, al poseer un $C_n < 1$, podrán ser resueltos mediante el MDFI, esquema que presenta mayor estabilidad en estos casos.

RESULTADOS

En este caso se aplicará el MH para resolver el flujo transiente en una red simple como la mostrada en la figura 1, la cual consta de dos tuberías cuyas características son:

Tubería 1: diámetro (D) = 1,0 (m), longitud (L) = 100 (m), velocidad de la onda (a) = 1000 (m/s), número de subtramos (N) = 1 y $C_n = 1,0$.

Tubería 2: $D = 1,0$ (m), $L = 1000$ (m), $a = 1000$ (m/s), $N = 10$ y $C_n = 1,0$.

Agua arriba del sistema (nodo 1) se ubica un estanque con cota constante ($H_0 = 200$ m) y agua abajo (nodo 3) se tiene una válvula de cierre gradual con tiempo de cierre en $T_c = 2,2$ s (ver curva de cierre τ vs tiempo en la figura 2). El paso de tiempo de la discretización es $\Delta t = 0,1$ (s). En ambas tuberías el factor de fricción (f) es igual a 0,012. En este caso el análisis transiente considera:

Caso 1: discretizar la red con $C_n = 1$ para todos los tramos; con esto es posible eliminar cualquier dispersión o atenuación numérica en el MC debido al efecto de C_n . El resultado de esta configuración se considerará como *exacto*.

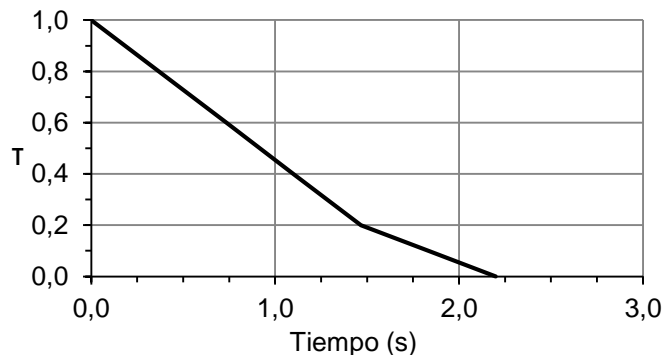


Fig. 2. Curva de cierre de la válvula

Caso 2: modificar el número de subtramos del tramo 2, pasando de $N = 10$ a $N = 5$ (como lo mostrado en la figura 1), de tal forma de conseguir $C_n = 0,5$. Con esto es posible obtener un efecto de dispersión numérica en la simulación del transiente mediante el MC.

En cada paso de tiempo y nodo de la red se deben aplicar las siguientes ecuaciones (siendo T_s , tiempo máximo de simulación):

- **Paso 1:** $t = 0$, calcular el flujo permanente (solución inicial H_0 y Q_0).
- **Paso 2:** $t = t + \Delta t$, calcular el flujo transiente:

Tramo 1 ($C_n = 1$). Nodos de borde 1 y 2: calcular H_p usando la ecuación 7. Considerar que: $H_R = H_1^t + (H_2^t - H_1^t) \cdot C_n$ y $Q_R = Q_1^t + (Q_2^t - Q_1^t) \cdot C_n$

Tramo 2 ($C_n < 1$). Nodo de borde 3: calcular H_p usando la ecuación 7. Considerar que: $H_L = H_6^t + (H_5^t - H_6^t) \cdot C_n$ y $Q_L = Q_6^t + (Q_5^t - Q_6^t) \cdot C_n$

Nodos internos 1, 2, 3, 4, 5 y 6: crear un sistema de ecuaciones de la forma $A \cdot x = b$, como se muestra a continuación, aplicando las ecuaciones 3 y 4 sobre cada subtramo del tramo 2. Tridiagonalizar el sistema de ecuaciones y luego resolver utilizando el algoritmo de Thomas [11].

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 d_1^1 & d_2^1 & -d_3^1 & d_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -c_1^1 & c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d_1^2 & d_2^2 & -d_3^2 & d_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -c_1^2 & c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & d_1^3 & d_2^3 & -d_3^3 & d_3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1^3 & c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1^4 & d_2^4 & -d_3^4 & d_3^4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1^4 & c_1^4 & c_2^4 & c_3^4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1^5 & d_2^5 & -d_3^5 & d_3^5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1^5 & c_1^5 & c_2^5 & c_3^5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ H_1 \\ Q_2 \\ H_2 \\ Q_3 \\ H_3 \\ Q_4 \\ H_4 \\ Q_5 \\ H_5 \\ Q_6 \\ H_6 \end{bmatrix}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} H_{P(1)} \\ -d_4^1 \\ -c_4^1 \\ -d_4^2 \\ -c_4^2 \\ -d_4^3 \\ -c_4^3 \\ -d_4^4 \\ -c_4^4 \\ -d_4^5 \\ -c_4^5 \\ H_{P(N+1)} \end{bmatrix}$$

En el sistema de ecuaciones mostrado arriba, el superíndice en cada coeficiente de la matriz A denota el número del subtramo. En el vector de incógnitas x , el subíndice denota el número del nodo interior del tramo. En el vector de coeficientes b , $H_{P(1)}$ corresponde a la cota piezométrica del nodo interno 1 del tramo, que coincide con el nodo de borde 2, y $H_{P(N+1)}$ corresponde a la cota piezométrica del nodo interno $N+1$, que coincide con el nodo de borde 3 (figura 1).

- **Paso 3:** si $t < T_s$, volver al paso 2. Caso contrario, detener la simulación transiente.

Como puede observarse en los pasos del MH mostrados arriba, el esquema comienza con una solución conocida para el flujo permanente (Q_0 y H_0) en $t = 0$ (s). Cuando se avanza hacia el siguiente paso de tiempo ($t = t + \Delta t$), el algoritmo del MH procede a resolver las secciones de borde del tramo 1, que tiene asignado $C_n = 1$, de manera explícita mediante el MC tradicional a partir de la ecuación 7 (en caso de tener un $N > 1$, se deben aplicar además las ecuaciones 5 y 6 para resolver los nodos internos). Con esto se obtienen Q y H para los nodos de borde 1 y 2. El tramo 2, con $C_n < 1$, es resuelto mediante el MDFI (Método de los Cuatro Puntos) utilizando las ecuaciones 3 y 4 para los subtramos 1 al 5, con lo cual se forma un sistema lineal de ecuaciones de tamaño 12×12 . Las dos ecuaciones adicionales al sistema de 10×10 (filas 1 y 12) corresponden a la aplicación de la ecuación 7 sobre los nodos de borde 2 y 3. Con esto, el sistema $A \cdot x = b$ del tramo 2 queda determinado al conocerse las variables de estado (Q , H) en sus nodos de borde. La figura 3 muestra la envolvente de presiones máximas y mínimas para el tramo 2 cuando se resuelve el transiente usando el MC con $C_n = 1$ y $C_n = 0,5$, y el MH con $C_n = 0,5$, donde se observa claramente en el MC ($C_n = 0,5$) un efecto de atenuación numérica -carente de sentido físico- en prácticamente toda la envolvente, constituyendo por tanto una solución incorrecta. En cambio, la figura 3 muestra, claramente, que la envolvente del MH presenta una menor atenuación longitudinal respecto del MC exacto. Esto se debe a que las secciones interiores del tramo 2 son resueltas mediante el MDFI, esquema más estable y preciso que el MC cuando $C_n < 1$. Al analizar la curva de presión vs tiempo en la válvula (figura 4), se observa que la curva MH Courant 0,5 presenta un leve desplazamiento respecto de la curva exacta (MC Courant = 1), efecto que es más visible a partir de los 30 (s) de iniciada la simulación. Este efecto de

desplazamiento es típico y esperable cuando se soluciona un transiente relativamente rápido usando un método basado en diferencias finitas.

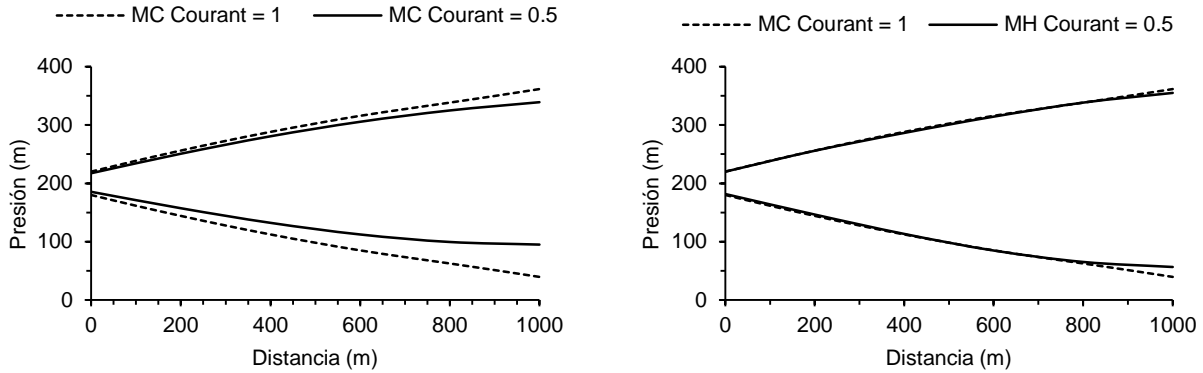


Fig. 3. Envolventes de presiones según el MC y el MH (tramo 2) aplicados con distintos Courant (C_n)

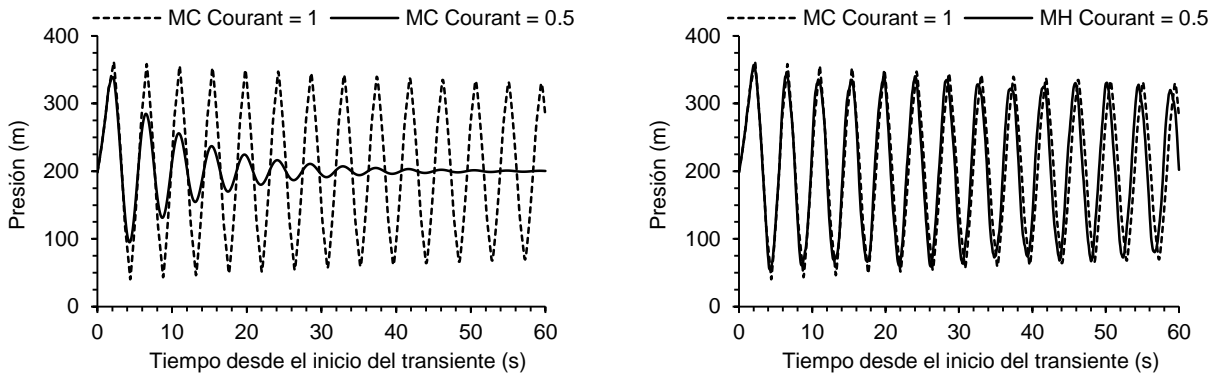


Fig. 4. Presión vs tiempo en la válvula

CONCLUSIONES

La idea de discriminar cada tramo de un sistema según el C_n que tenga asignado, diferenciando entre aquellos que tienen $C_n = 1$ (o C_n muy cercano a 1) y los demás con $C_n < 1$, para luego desacoplar la red en sus nodos de borde y aplicar en cada caso el método óptimo de solución para sus nodos internos, ya sea el MC cuando $C_n = 1$ (o $C_n \approx 1$), y el MDFI (Preissman) cuando $C_n < 1$. Esta forma de solución permite conseguir una solución más estable y precisa, con un menor volumen de atenuación numérica, sin gastar demasiada memoria computacional ni tiempo de ejecución del programa, ya que el tamaño del sistema de ecuaciones queda supeditado a la cantidad máxima de N que tenga el tramo con $C_n < 1$. En el ejemplo propuesto, el MC demoró 24,3 (s) en obtener el resultado, siendo que el MH tardó 64,2 (s), valor razonable más aún cuando lo que entrega es un mejor resultado. Ambos algoritmos fueron ejecutados en un PC de 64 bits con velocidad de procesamiento de 1,48 (GHz). Otro punto interesante es que el MH, dada sus características numéricas, permite resolver en flujo transiente con un buen nivel de estabilidad y precisión numéricas sin necesidad de tener que modificar los valores de a y/o L en orden a conseguir que $C_n = 1$. En este sentido, cuando $C_n = 0,5$, en caso de considerar a N como un valor inmodificable, la correcta aplicación del MC en la tubería 2 debiera pasar por aumentar el valor de a un 100 % (hasta 2000 m/s) o reducir el valor de L un 50 % (hasta 500 m), ceteris paribus. En muchos casos es tentador modificar el valor de a en orden a cumplir con Courant, esto debido a su aparente obvedad y también aparente menor costo en términos computacionales. Sin embargo, este camino de solución oculta una serie de situaciones

de tipo físico que puede significar la adopción de valores artificiales o ficticios, sin significado físico, aún con modificaciones mínimas de α [12]. El algoritmo funciona bien y es relativamente rápido, además es simple de programar. Solo basta incorporar en el código del programa una instrucción que pregunte cuál método aplicar sobre un tramo determinado una vez conocido su valor de C_n . En los tramos que son resueltos mediante el MDFI, se genera un efecto de interpolación numérica en los nodos de borde cuando $C_n < 1$ debido a que estos son resueltos usando el MC, siendo su impacto mínimo en el ejemplo analizado. Este procedimiento de solución puede ser ampliado o extendido utilizando, en lugar del MDFI, otro tipo de esquemas numéricos igual de estables y precisos, aunque de naturaleza explícita, como el Método de McCormack u otros [13].

REFERENCIAS

1. Abuaziah I, Oulhaj A, Sebari K, Ouazar D. Sizing of protection devices to control water hammer damage. *International Journal of Civil, Architectural Science and Engineering*, 2013. 7(11):415-420.
2. Jung Bong S, Wood D, Bros Ch. A Lagrangian wave characteristic method for simulating transient water column separation". *Journal of AWWA*, 2009. 101(6): 64-73.
3. Radulj D. Assessing the hydraulic transient performance of water and wastewater systems using field and numerical modeling data. Thesis of Master of Applied Science, Graduate Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto, Canada, 2010.
4. Twyman J. Análisis del golpe de ariete en un sistema de distribución de agua. *Ingeniería del Agua*, 2017. 21(2): 87-102.
5. Watt CS, Bolby AP, HOBBS JM. Combination of finite difference and finite element techniques in hydraulic transient problems. Paper B2, Third International Conference on Pressure Surges, BHRA, held at the University of Bath, UK. 1980.
6. Karney B. Analysis of fluid transients in large distribution networks. PhD Thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada. 1984. DOI: 10.14288/1.0062640. URL: <http://hdl.handle.net/2429/25312>.
7. Karney B, McInnis D. Efficient calculation of transient flow in simple pipe networks". *Journal of Hydraulic Engineering*, 1992. 118(7):1014-1030.
8. Chaudhry H. *Applied Hydraulic Transients*. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1979. 266 pp. ISBN 0-442-21517-7.
9. Kim Y. Advanced Numerical and Experimental Transient Modelling of Water and Gas Pipeline Flows Incorporating Distributed and Local Effects". PhD Thesis, The University of Adelaide, Adelaide, Australia, 2008.
10. Twyman J. Decoupled Hybrid Methods for unsteady flow analysis in pipe networks. Ed. La Cáfila, Valparaíso, Chile, 2004. 185 pp. ISBN 956-8142-17-7.
11. Press W, Teukolsky S, Vetterling W, Flannery B. *Numerical recipes in Fortran 77. The art of scientific computing*. Cambridge University Press, New York, 1992. 933 pp. ISBN 0-521-43064-X.
12. Twyman J. Wave speed calculation for water hammer analysis. *Revista Obras y Proyectos*, 2016. 20, pp. 86-92. ISSN 0718-2813. URL: <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-28132016000200007>.
13. Chaudhry H, Hussaini M. Second-order accurate explicit finite-difference schemes for waterhammer analysis. *Journal of Fluid Engineering*, 1985. 107: 523-529.