

# Diseño racional de engranajes cilíndricos orientado a aumentar eficiencia y disminuir pérdidas por fricción

**Gonzalo González Rey**

Correo electrónico:cidim@mecanica.cujae.edu.cu

**Alejandra García Toll**

Correo electrónico:agarcia@ceim.cujae.edu.cu

**María Eugenia García Domínguez**

Correo electrónico:megarcia@mecanica.cujae.edu.cu

Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, Ciudad de La Habana, Cuba

Recibido: enero 2010

Aprobado: marzo 2010

## Resumen

Los engranes de ruedas cilíndricas y ejes paralelos con contacto exterior constituyen transmisiones mecánicas muy eficientes, pero los requerimientos de máxima eficiencia en las actuales máquinas y equipos hacen necesaria una precisión en los procedimientos de cálculo de pérdidas de potencia. En este sentido, el Reporte Técnico ISO/TR 14179-1:2001 ofrece fórmulas con bases empíricas y teóricas para evaluar la eficiencia de engranajes considerando pérdidas por rozamiento en el contacto diente-diente, por batimiento del aceite y por rozamiento en cojinetes y sellos. En este artículo, se presentan algunos de los resultados derivados de un estudio de ISO/TR 14179-1:2001 y del coeficiente de fricción en engranajes. El estudio fue realizado sobre la base de modelos matemáticos que permitieron interrelacionar la geometría del engranaje y los parámetros de explotación con la eficiencia del engranaje. Los resultados aportan soluciones al problema de aumentar la eficiencia de los engranajes mediante una relación conveniente entre la carga y la velocidad, y una geometría racional del dentado de las ruedas. Finalmente, mediante un análisis de regresión múltiple se establece una nueva formulación de la eficiencia del engranaje en función de la densidad de carga en el engranaje, el módulo, la velocidad de trabajo, la razón de transmisión y la cantidad de dientes en el piñón.

Palabras clave: engranaje cilíndrico, eficiencia, coeficiente de fricción, ISO/TR 14179-1

## INTRODUCCIÓN

En la actualidad, nuevas regulaciones gubernamentales promueven la reducción del gasto energético con el empleo de equipos más eficientes. Este hecho, ha renovado el creciente interés y demanda de máquinas con mayores eficiencias para enfrentar una reducción de los costos de explotación y mantenimiento, sobre la base de disminuir las pérdidas de potencia con tecnologías más eficientes.

Dentro de las variadas formas de transferir la energía en los equipamientos actuales son destacables las

transmisiones mecánicas, con una amplia divulgación en la técnica contemporánea. Múltiples pueden ser las formas de transmitir la energía mecánica, pero indiscutiblemente que las de mayor generalización y actualidad son los accionamientos con engranajes, debido a la combinación de soluciones disponibles para transmitir el movimiento con eficiencia y diversidad geométrica. Por consiguiente, una formulación correcta y precisa de la determinación de las pérdidas por rozamiento entre los dientes de las ruedas permitiría realizar diseños de engranajes más eficientes y recomendar procedimientos de explotación más efectivos.

Desde los últimos años de la década del 90, se trabaja en la elaboración de nuevas y mejores normativas dirigidas a mejorar la efectividad en explotación de los engranajes por varias de las asociaciones responsabilizadas con la edición de normas ISO de engranajes. En particular, se distingue la aprobación de los reportes técnicos: ISO/TR 14179-1:2001 [1] e ISO/TR 14179-2:2001 [2]. Los mencionados reportes técnicos ISO incluyen fórmulas para evaluar las pérdidas de potencia del sistema de engranajes, considerando las pérdidas por rozamiento y rodadura en el contacto diente-diente, entre otros.

En particular, se pretende presentar en este trabajo un resumen de algunos de los principales resultados derivados de la comparación de los procedimientos de cálculo de las pérdidas de potencia en el engranaje de ruedas dentadas cilíndricas con dientes de evolvente con contacto exterior y ejes paralelos. Los comentarios emitidos pueden ser útiles en la determinación de los parámetros de uso y diseño adecuados para obtener engranajes cilíndricos más eficientes durante su explotación. Además, el estudio permite demostrar que, a pesar de los avanzados resultados aceptados para evaluar la eficiencia de los engranajes, aún existen discrepancias importantes entre los diferentes procedimientos para la determinación del coeficiente de fricción en el contacto entre dientes durante el engranaje.

## PÉRDIDAS DE POTENCIA POR FRICCIÓN EN ENGRANAJES CILÍNDRICOS SEGÚN ISO

Las ecuaciones declaradas en el Reporte Técnico ISO/TR 14179-1 para evaluar las pérdidas por fricción en engranajes cilíndricos están basadas en el estudio y experimentación de 251 reductores de velocidad con engranajes de ruedas cementadas y rectificadas, [3] que permitieron establecer una fórmula empírica para el coeficiente de fricción en dependencia de la velocidad circunferencial de las ruedas, la intensidad de la carga en el contacto y la viscosidad cinemática del aceite. El cálculo de las pérdidas de potencia considera el engranaje entre los dientes con una película de lubricante entre los flancos activos mediante las ecuaciones (1) - (6):

$$P_{roz} = \frac{f_m \cdot T_1 \cdot n_1 \cdot \cos^2 \beta}{9 \, 549 \cdot M} \text{ [kW]} \quad (1)$$

$$f_m = \frac{v^{-0,223} \cdot K^{-0,4}}{3,239 \cdot v^{0,7}} \quad (2)$$

$$K = \frac{1 \, 000 \cdot T_1 \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot b_w \cdot (d_1 / 2)^2 \cdot z_2} \quad (3)$$

$$M = \frac{2 \cdot \cos \alpha_t \cdot (H_s + H_t)}{H_s^2 + H_t^2} \quad (4)$$

$$H_s = (u + 1) \cdot \left[ \left( \frac{d_{a2}^2}{d_2^2} - \cos^2 \alpha_t \right)^{0,5} - \sin \alpha_t \right] \quad (5)$$

$$H_t = \frac{(u + 1)}{u} \cdot \left[ \left( \frac{d_{a1}^2}{d_1^2} - \cos^2 \alpha_t \right)^{0,5} - \sin \alpha_t \right] \quad (6)$$

donde:

$P_{roz}$ : Pérdidas por fricción en engranajes [kW].

$f_m$ : Coeficiente de fricción.

$K$ : Factor por intensidad de carga [MPa].

$M$ : Factor por velocidades de deslizamiento.

$H_s$ : Razón de deslizamiento a inicio del engranaje.

$H_t$ : Razón de deslizamiento a final del engranaje.

$T_1$ : Momento torsor en el piñón [Nm].

$n_1$ : Frecuencia de rotación del piñón [min<sup>-1</sup>].

$\beta$ : Ángulo de la hélice [°].

$\nu$ : Viscosidad cinemática del lubricante [mm<sup>2</sup>/s].

$v$ : Velocidad en circunferencia primitiva [m/s].

$z_1$  y  $z_2$ : Número de dientes en el piñón y la rueda.

$b_w$ : Ancho de engranaje [mm].

$d_1$ : Diámetro primitivo en piñón [mm].

$d_2$ : Diámetro primitivo en rueda [mm].

$\alpha_t$ : Ángulo transversal de engranaje [°].

$d_{a1}$ : Diámetro de cresta del piñón [mm].

$d_{a2}$ : Diámetro de cresta en rueda [mm].

$u$ : Razón de engranaje ( $z_2/z_1$ ).

$m$ : módulo (mm).

$a$ : Distancia interaxial (mm).

$d_{b1}$ : Diámetro básico del piñón [mm].

$d_{b2}$ : Diámetro básico en rueda [mm].

$d_{f1}$ : Diámetro de fondo del piñón [mm].

$d_{f2}$ : Diámetro de fondo en rueda [mm].

$\alpha$ : Ángulo de presión en la cuchilla (°).

$ha^*$ : Factor de altura de la cabeza de la cuchilla.

$c^*$ : Factor constante de holgura radial.

$\varepsilon$ : Coeficiente de recubrimiento.

$Pot$ : Potencia a transmitir (kW).

$\eta$ : Eficiencia del engranaje.

La ecuación (2) es válida para velocidades en la circunferencia primitiva de las ruedas entre 2m/s y 25m/s y factores por intensidad de carga entre 1,4N/mm y 14,2N/mm, fuera de estos límites el coeficiente de fricción debe ser determinado experimentalmente.

Con el objetivo de realizar una comparación de la validez de las formulaciones establecidas en los reportes técnicos: ISO/TR 14179-1 y 2: 2001 para el cálculo de las pérdidas de potencia en el engranaje de ruedas dentadas cilíndricas con dientes de evolvente con contacto exterior y ejes paralelos fue realizado por los autores un anterior estudio. [4] El referido estudio permitió corroborar que los resultados del cálculo de las pérdidas de potencia según ISO/TR 14179-1 son próximos

a los determinados prácticamente. Este hecho propició que el trabajo se orientara a presentar algunos de los resultados derivados del estudio de la eficiencia y del coeficiente de fricción entre dientes de engranajes cilíndricos basado en las formulaciones del Reporte Técnico ISO/TR 14179-1:2001.

## PARÁMETROS DE DISEÑO Y EXPLOTACIÓN CON INFLUENCIA EN LA EFICIENCIA DE LOS ENGRANAJES SEGÚN ISO/TR 14179-1

Aceptando que la comparación de los resultados experimentales y teóricos permite afirmar que los valores de pérdidas de potencia según ISO/TR 14179-1 son próximos a los resultados reales, se considera conveniente realizar un análisis de la influencia en la eficiencia de la transmisión de algunos parámetros de la geometría de engranajes.

Empleando las ecuaciones declaradas en ISO/TR 14179-1 para evaluar la eficiencia del engranaje y analizando una interrelación con la geometría del dentado de las ruedas, la carga y velocidad de trabajo fue elaborado un modelo matemático de 21 relaciones entre 32 variables con 11 grados de libertad. A continuación se presentan las relaciones constitutivas del modelo matemático desde la relación (R1) hasta (R21), cuyas variables han sido identificadas anteriormente.

$$(R1) z_2 - u \cdot z_1 = 0$$

$$(R2) m \cdot z_1 - d_1 \cdot \cos \beta = 0$$

$$(R3) m \cdot z_2 - d_2 \cdot \cos \beta = 0$$

$$(R4) m \cdot (z_1 + z_2) - 2 \cdot a \cdot \cos \beta = 0$$

$$(R5) \frac{\tan \alpha}{\cos \beta} - \tan \alpha_t = 0$$

$$(R6) d_1 \cdot \cos \alpha_t - d_{b1} = 0$$

$$(R7) d_2 \cdot \cos \alpha_t - d_{b2} = 0$$

$$(R8) d_1 - 2 \cdot m \cdot (h_a^* + c^*) - d_{f1} = 0$$

$$(R9) d_2 - 2 \cdot m \cdot (h_a^* + c^*) - d_{f2} = 0$$

$$(R10) 2 \cdot a - d_{f2} - 2 \cdot c^* \cdot m - d_{a1} = 0$$

$$(R11) 2 \cdot a - d_{f1} - 2 \cdot c^* \cdot m - d_{a2} = 0$$

$$(R12) \left[ 0,5 \cdot \sqrt{(d_{a1}^2 - d_{b1}^2)} + 0,5 \cdot \sqrt{(d_{a2}^2 - d_{b2}^2)} - \right. \\ \left. - a \cdot \sin \alpha_t - \varepsilon_\alpha \cdot m \cdot \pi \cdot \left( \frac{\cos \alpha_t}{\cos \beta} \right) = 0 \right]$$

$$(R13) 30\,000 \cdot Pot - T_1 \cdot \pi \cdot n_1 = 0$$

$$(R14) n_1 \cdot \pi \cdot d_1 - 60\,000 \cdot V = 0$$

$$(R15) 1000 \cdot T_1 \cdot (z_1 + z_2) - K \cdot 2 \cdot b_w \cdot \left( \frac{d_1}{2} \right)^2 \cdot z_2 = 0$$

$$(R16) v^{-0,223} \cdot K^{-0,4} - f_m \cdot 3,239 \cdot v^{0,7} = 0$$

$$(R17) (u+1) \cdot \left[ \left( \frac{\left( \frac{d_{a2}}{2} \right)^2}{\left( \frac{d_2}{2} \right)^2} - \cos^2 \alpha_t \right)^{0,5} - \sin \alpha_t \right] - H_s = 0$$

$$(R18) H_t = \frac{(u+1)}{u} \cdot \left[ \left( \frac{\left( \frac{d_{a1}}{2} \right)^2}{\left( \frac{d_1}{2} \right)^2} - \cos^2 \alpha_t \right)^{0,5} - \sin \alpha_t \right] - H_t = 0$$

$$(R19) 2 \cdot \cos \alpha_t \cdot (H_s + H_t) - M \cdot (H_s^2 + H_t^2) = 0$$

$$(R20) f_m \cdot T_1 \cdot n_1 \cdot \cos^2 \beta - P_{roz} \cdot 9\,549 \cdot M$$

$$(R21) (Pot - P_{roz}) - \eta \cdot Pot = 0$$

El anterior modelo matemático fue analizado con técnicas de grafos para una mejor comprensión de la interrelación entre las variables y las relaciones participantes en las soluciones de los problemas. La figura 1 muestra la representación del mencionado modelo matemático mediante un grafo.

Tomando como referencia el primer modelo matemático fue planteado el problema de la determinación de la eficiencia de un engranaje cilíndrico con fundamento en la norma ISO/TR 14179-1, una consecuente geometría del engranaje en la etapa de diseño y una caracterización de la aplicación en explotación basada en la velocidad y carga de trabajo de engranaje. Este problema fue el punto de partida para elaborar un segundo modelo matemático que soluciona

lo relacionado con el cálculo de la eficiencia del engranaje con participación de 18 relaciones pertinentes. Del análisis del modelo matemático del problema de la determinación de la eficiencia de un engranaje cilíndrico fue identificado que las relaciones (R6), (R7) y (R12) del primer modelo matemático no son necesarias en la solución de problema que se plantea.

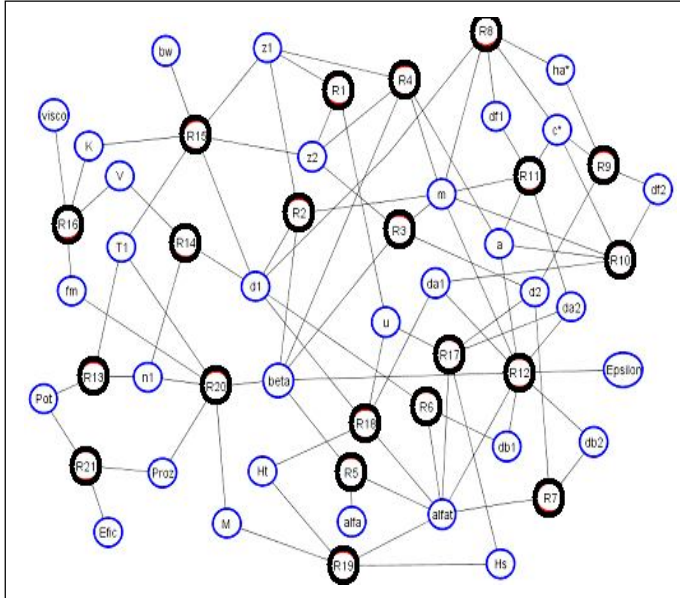


Fig. 1. Grafo del modelo matemático de la interrelación de la eficiencia del engranaje con la geometría del diente de las ruedas, la carga y la velocidad de trabajo.

A continuación se declaran las relaciones participantes en el modelo matemático de la solución del problema.

$$(R1) u = \frac{z_2}{z_1}$$

$$(R2) d_1 = \frac{m \cdot z_1}{\cos \beta} \text{ (mm)}$$

$$(R5) \alpha_t = \tan^{-1} \left( \frac{\tan \alpha}{\cos \beta} \right) (^\circ)$$

$$(R13) T_1 = \frac{30\,000 \cdot \text{Pot}}{\pi \cdot n_1} \text{ (Nm)}$$

$$(R3) d_2 = \frac{m \cdot z_2}{\cos \beta} \text{ (mm)}$$

$$(R4) a = \frac{m \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot \cos \beta} \text{ (mm)}$$

$$(R8) d_{f1} = d_1 - 2 \cdot m \cdot (h_a^* + c^*) \text{ (mm)}$$

$$(R9) d_{f2} = d_2 - 2 \cdot m \cdot (h_a^* + c^*) \text{ (mm)}$$

$$(R10) d_{a1} = 2 \cdot a - d_{f2} - 2 \cdot c^* \cdot m \text{ (mm)}$$

$$(R11) d_{a2} = 2 \cdot a - d_{f1} - 2 \cdot c^* \cdot m \text{ (mm)}$$

$$(R14) v = \frac{n_1 \cdot \pi \cdot d_1}{60\,000} \text{ (m/s)}$$

$$(R15) K = \frac{1000 \cdot T_1 \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot b_w \cdot \left( \frac{d_1}{2} \right)^2 \cdot z_2} \text{ (N-mm}^2\text{)}$$

$$(R16) f_m = \frac{v^{-0.223} \cdot K^{-0.4}}{3,239 \cdot v^{0.7}}$$

$$(R17) H_s = (u + 1) \cdot \left[ \frac{\left( \left( \frac{d_{a2}}{2} \right)^2 - \cos^2 \alpha_t \right)^{0.5}}{\left( \left( \frac{d_2}{2} \right)^2 - \cos^2 \alpha_t \right)} - \text{sen} \alpha_t \right]$$

$$(R18) H_t = \frac{(u + 1)}{u} \cdot \left[ \frac{\left( \left( \frac{d_{a1}}{2} \right)^2 - \cos^2 \alpha_t \right)^{0.5}}{\left( \left( \frac{d_1}{2} \right)^2 - \cos^2 \alpha_t \right)} - \text{sen} \alpha_t \right]$$

$$(R19) M = \frac{2 \cdot \cos \alpha_t \cdot (H_s + H_t)}{H_s^2 + H_t^2}$$

$$(R20) P_{roz} = \frac{f_m \cdot T_1 \cdot n_1 \cdot \cos^2 \beta}{9\,549 \cdot M} \text{ (kw)}$$

$$(R21) \eta = \frac{\text{Pot} - P_{roz}}{\text{Pot}}$$

Con referencia al segundo modelo matemático fue establecido un procedimiento de cálculo de la eficiencia de un engranaje de ruedas cilíndricas, con dientes rectos sin corrección del perfil, considerando las pérdidas por fricción propias del rozamiento entre los flancos activos de los dientes conjugados. El procedimiento fue organizado en tablas Excel confeccionadas al efecto y permitió evaluar la eficiencia del engranaje con variaciones de parámetros de diseño y de explotación. En las figuras 2, 3, 4, 5 y 6 son mostrados algunos de los resultados obtenidos con una relación ancho de engranaje y distancia interaxial de  $b_w/a_w = 0,3$ ; aceite con viscosidad cinemática de trabajo de  $n = 150 \text{ mm}^2/\text{s}$  y ruedas dentadas talladas con herramientas de generación con perfil de referencia según NC-ISO 53-2007.

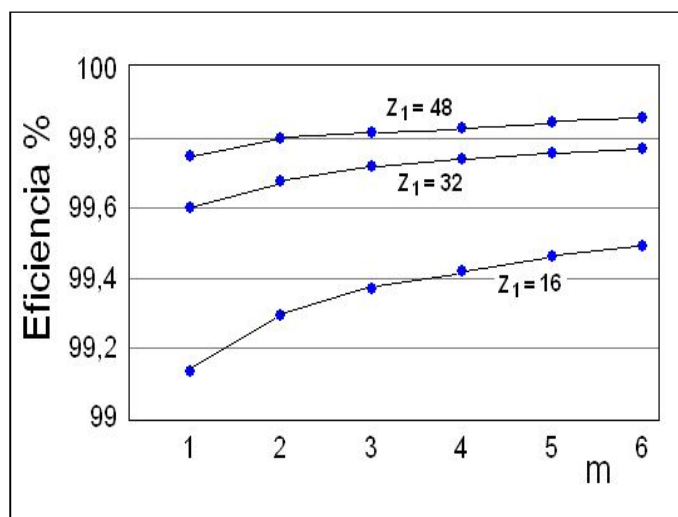


Fig. 2. Eficiencias estimadas según ISO/TR-14179-1. Engranajes con razón de transmisión  $u = 1$ , carga unitaria sobre dientes de  $250 \text{ N/mm}$  y velocidad de rotación de entrada (piñón) de  $n_1 = 1\,000 \text{ min}^{-1}$ .

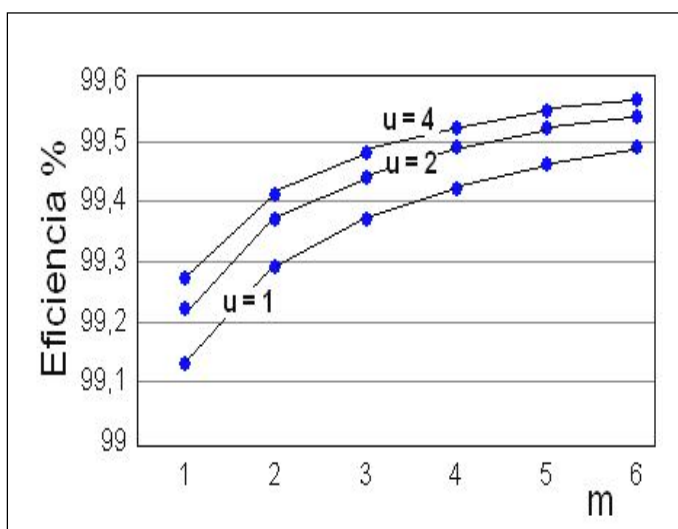


Fig. 3. Eficiencias estimadas según ISO/TR-14179-1. Engranajes con carga unitaria sobre dientes de  $250 \text{ N/mm}$ , velocidad de entrada (piñón)  $n_1 = 1\,000 \text{ min}^{-1}$  y número de dientes en piñón  $z_1 = 16$ .

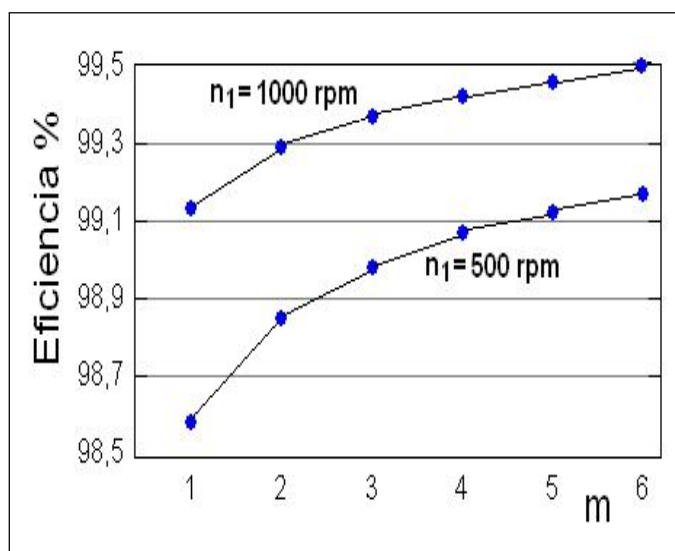


Fig. 4. Eficiencias estimadas según ISO/TR-14179-1. Engranajes con carga unitaria sobre dientes de  $250 \text{ N/mm}$ , razón de transmisión  $u = 1$  y número de dientes en el piñón  $z_1 = 16$ .

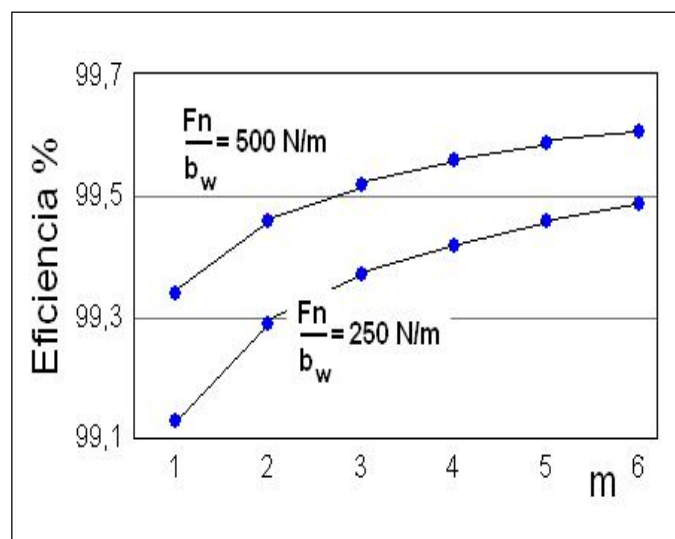
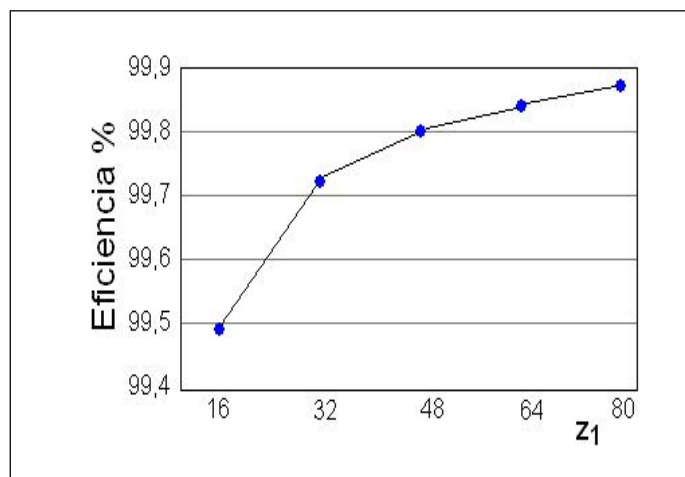


Fig. 5. Eficiencias estimadas según ISO/TR-14179-1. Engranajes con razón de transmisión  $u = 1$ , velocidad de rotación de entrada (piñón)  $n_1 = 1\,000 \text{ min}^{-1}$  y número de dientes en el piñón  $z_1 = 16$ .

Los resultados de este trabajo permiten afirmar que las mayores eficiencias del engranaje cilíndrico con ruedas de dientes rectos, contacto exterior y ejes paralelos según ISO/TR 14179-1 se logran cuando la explotación se ejecuta a las mayores velocidades y cargas de la transmisión (figuras 4 y 5). Es conveniente para lograr las máximas eficiencias de las transmisiones por engranajes, con una proporción fija de ancho/distancia entre ejes, ejecutar diseños con valores altos de relación de transmisión cinemática y ruedas dentadas con gran cantidad de dientes (figuras 2 y 3).

Los anteriores resultados consideran una dependencia del módulo debido a que se ha preferido establecer una relación constante entre ancho de engranaje y distancia entre centros, lo que admite un análisis de engranajes con diferentes distancias entre ejes y por consiguiente con diferentes número de dientes y módulos. Los resultados confirman que la mayor eficiencia se logra en los engranajes con mayores números de dientes, tal y como se muestra en la figura 6.



**Fig. 6. Eficiencias para engranajes estimadas según ISO/TR-14179-1 con distancia interaxial  $a = 96\text{mm}$ , módulos 1,2 ( $z = 80$ ) y 6 mm ( $z = 16$ ), razón de transmisión  $u = 1$ , velocidad de rotación de entrada (piñón)  $n_1 = 1\,000\text{min}^{-1}$  y número de dientes en el piñón  $z_1 = 16$ .**

En el presente trabajo y con base en las ecuaciones declaradas en el Reporte Técnico ISO/TR 14179-1 para evaluar las pérdidas por fricción en engranajes cilíndricos, fue determinada la eficiencia de 40 casos ejemplos considerando las pérdidas por fricción debido al engrane de los dientes.

En el análisis del comportamiento de la eficiencia del engranaje, fueron aceptadas como variables independientes el número de dientes ( $z_1$ ), la frecuencia de rotación del piñón ( $n_1$ ), la razón de engranaje ( $u$ ), el módulo de las ruedas ( $m$ ) y la carga unitaria sobre el flanco en los dientes ( $F_n/b$ ).

Los ejemplos analizados fueron establecidos con una relación ancho de engranaje y distancia interaxial de  $b_w/a_w = 0,3$ , aceite con viscosidad cinemática de trabajo de  $\nu = 150\text{ mm}^2/\text{s}$ , ruedas dentadas talladas sin corrección ( $x_1 = x_2 = 0$ ) y herramientas con ángulo entre flanco  $\alpha = 20^\circ$  y factor de altura de cabeza  $ha^* = 1$ . En la tabla 1 y las figuras 7 y 8 se muestran resultados del cálculo y su generalización.

Mediante un análisis de regresión múltiple pudo ser establecida una interrelación directa entre la eficiencia del engranaje y las variables independientes. La ecuación (7) se presenta como una nueva formulación para determinar la

eficiencia de un engranaje cilíndrico de dientes rectos con flancos de evolventes y contacto exterior.

$$\eta = 97,923\,3 + 0,000\,567\,737 \cdot \frac{F_n}{b} + 0,066\,134\,4 \cdot m + 0,000\,819\,465 \cdot n_1 + 0,041\,502\,5 \cdot u + 0,013\,360\,4 \cdot z_1 \quad \% \quad (7)$$

**Tabla 1**  
Algunos valores de eficiencia de engranajes cilíndricos determinados según ISO/TR 14179-1

$\eta \%$	$z_1$	$u$	$n_1 \text{ (min}^{-1}\text{)}$	$F_n/b \text{ (N/mm)}$	$m$
99,80	48	1	1 000	250	2
99,82	48	1	1 000	250	3
99,83	48	1	1 000	250	4
99,85	48	1	1 000	250	5
99,86	48	1	1 000	250	6
99,27	16	4	1 000	250	1
99,41	16	4	1 000	250	2
99,48	16	4	1 000	250	3
99,55	16	4	1 000	250	4
99,57	16	4	1 000	250	5
99,22	16	2	1 000	250	1
99,37	16	2	1 000	250	2
99,44	16	2	1 000	250	3
99,49	16		1 000	250	4
98,58	16	1	500	250	1
98,85	16	1	500	250	2
98,98	16	1	500	250	3
99,07	16	1	500	250	4
99,12	16	1	500	250	5
99,17	16	1	500	250	6
99,34	16	1	1 000	500	1



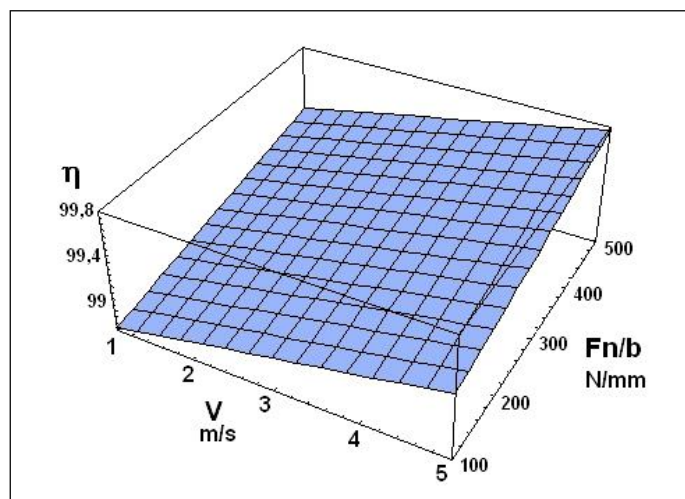


Fig. 7. Comportamiento de la eficiencia de engranajes cilíndricos en función de la velocidad circunferencial de las ruedas ( $V$ ) y la carga específica sobre el diente ( $F_n/b$ ).

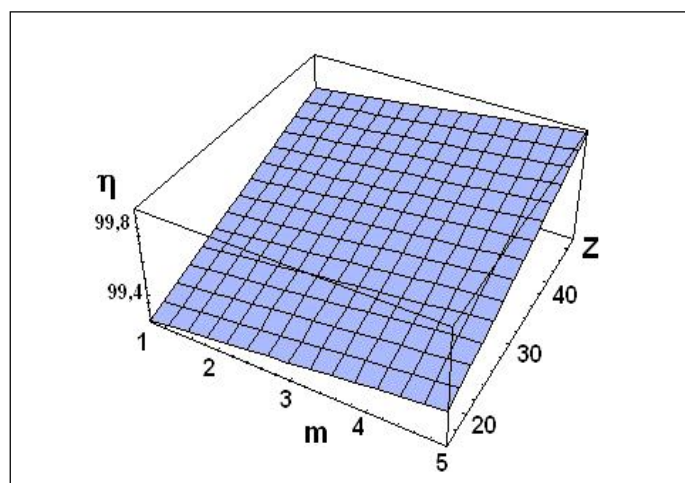


Fig. 8. Comportamiento de la eficiencia  $\eta$  de engranajes cilíndricos en función del módulo ( $m$ ) y número de dientes de ruedas iguales a  $1\,000\text{ min}^{-1}$  y carga específica de  $250\text{ N/mm}$ .

## COEFICIENTE DE FRICCIÓN EN ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE EJES PARALELOS Y CONTACTO EXTERIOR CONVENIENTEMENTE LUBRICADOS

Un análisis de las formulaciones para evaluar las pérdidas de potencia en los engranajes cilíndricos de ejes paralelos y contacto exterior según ISO/TR-14179-1 y 2 permite afirmar que las disparidades entre los resultados están responsabilizadas con las formulaciones empíricas adoptadas para el coeficiente de fricción. En este sentido, es justificable una comparación de las formulaciones más difundidas para evaluar el coeficiente de fricción en los engranajes.

Varios modelos físico-matemáticos, resultados de ensayos múltiples, han sido propuestos para evaluar el coeficiente de

fricción en un engranaje, pero la realidad es que en la actualidad existen aún imprecisiones en los resultados que se obtienen debido a las simplificaciones que se incluyen para aceptar un coeficiente de fricción promedio cuando en realidad el coeficiente de fricción en el engranaje es un valor instantáneo dependiente de las zonas del flanco de los dientes en donde se localiza el contacto.

En la figura 9, se aprecian los valores superiores del coeficiente de fricción según ISO/TR 14179 al ser comparados con los resultados experimentales de Hori [5] en la evaluación del coeficiente de fricción instantáneo en el contacto sobre la línea de engranaje. Los resultados de Hori fueron obtenidos sin considerar distribución de cargas entre dientes y corresponden a un engranaje pequeño casi estacionario.

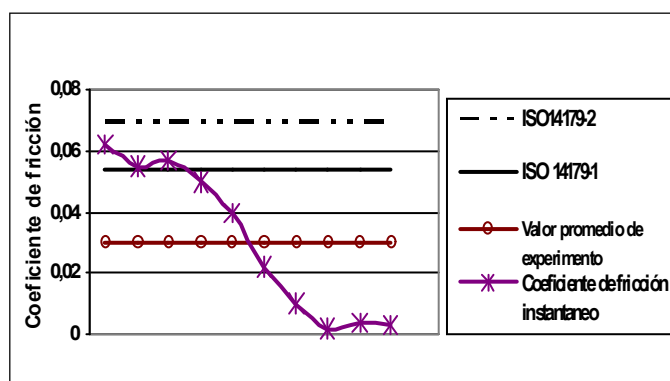


Fig. 9. Coeficiente de fricción a lo largo de la línea de engranaje según ensayos de Hori [5] y los resultados derivados de la aplicación de las formulas de ISO/TR 14179.

Estudiosos del tema, han obtenido empíricamente varias formulaciones para el coeficiente de fricción promedio en engranajes cilíndricos. Algunas de las relaciones más conocidas para evaluar el coeficiente de fricción se muestran a continuación.

a) Coeficiente de fricción de Drozdov-Gavrikov [6]:

$$f_m = \frac{1}{0,8 \cdot \sqrt{v_k} \cdot \bar{V}s + \bar{V}r \cdot \theta + 13,4} \quad (8)$$

$$\bar{V}s = 0,026 \cdot 2 \cdot n_1 \cdot \left( \frac{1+u}{u} \right) \cdot g_\alpha [\text{m/s}] \quad (9)$$

$$\bar{V}r = 0,104 \cdot n_1 \cdot \left[ d_1 \cdot \sin \alpha - \frac{g_\alpha}{4} \cdot \left( \frac{u-1}{u} \right) \right] [\text{m/s}] \quad (10)$$

$$\theta = 0,47 - 0,13 \cdot 10^{-4} \cdot P_{m\acute{a}x} - 0,4 \cdot 10^{-3} \cdot v \quad (11)$$

$$P_{m\acute{a}x} = \sqrt{\frac{210\,000 \cdot F_T}{2 \cdot \pi \cdot b_w \cdot \rho_{red}}} \cdot 10 [kg/cm^2] \quad (12)$$

donde:

$g_a$ : Longitud de línea de engranaje (mm).

$n_K$ : Viscosidad dinámica lubricante (mm<sup>2</sup>/s).

$\bar{v}_s$ : Velocidad media deslizamiento (m/s).

$\bar{v}_r$ : Velocidad media de rodadura (m/s).

b) Coeficiente de fricción de Benedict-Kelly [7]:

$$f_m = 0,0127 \cdot \log_{10} \left( \frac{29,66 \cdot F_T / b_w}{v \cdot \bar{v}_s \cdot (\bar{v}_r)^2} \right) \quad (13)$$

c) Coeficiente de fricción de Misharin [8]:

$$f_m = 0,325 \cdot \left( \bar{v}_s \cdot \bar{v}_r \cdot v_k \right)^{-0,25} \quad (14)$$

d) Coeficiente de fricción de ISO 14179-2:2001.

$$f_m = 0,048 \cdot \left( \frac{F_T}{b_w \cdot V_\Sigma \cdot \rho_{red}} \right)^{0,2} \cdot v^{-0,05} \cdot \left( \frac{R_{a1} + R_{a2}}{2} \right)^{0,25} \cdot X_L \quad (15)$$

Los valores de coeficientes de fricción calculados según las fórmulas (2), (8), (13), (14) y (15) fueron determinados para engranajes con diferentes geometrías, cargas y velocidad. Algunos resultados son replicados en forma de gráficos desde la figura 10 hasta la figura 14.

En general, se observa que los valores del coeficiente de fricción según Misharin [8] e ISO/TR 14179-2:2001 [2] son superiores y mantienen un comportamiento semejante. Los valores del coeficiente de fricción según ISO/TR 14179-1:2001 [1] son los menores y muy cercanos en comportamiento a los valores promedio de Benedict [7] y Drozdov [6].

Los resultados demuestran que los valores del coeficiente de fricción según ISO/TR 14179-1:2001 están más próximos a los promedios generalmente aceptados por la práctica de la ingeniería.

Otra compilación de los resultados, algunos de ellos reflejados en la tabla 2, muestra que los menores coeficientes de fricción del engranaje cilíndrico de ruedas con dientes rectos, contacto exterior y ejes paralelos se logran con mayores velocidades de trabajo y mayor número de dientes en las ruedas. Adicionalmente, los resultados demuestran que existe contradicción entre los resultados

derivados de ISO/TR 14179-2 y Benedict-Kelly que prevén un incremento del coeficiente de fricción ante aumentos de la carga unitaria en los engranajes, en contraposición con ISO/TR 14179-1 que estima una disminución del coeficiente de fricción.

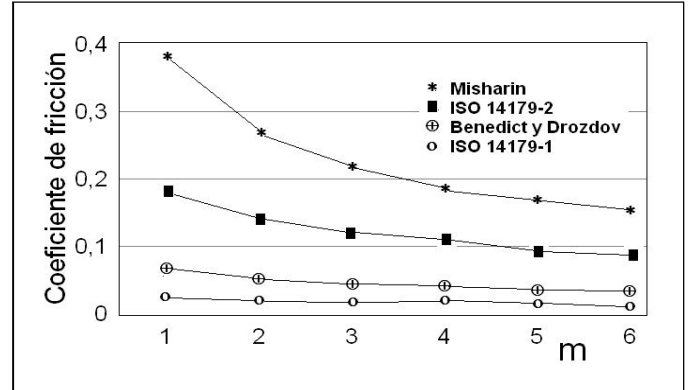


Fig. 10. Valores de coeficientes de fricción para engranajes con razón de transmisión  $u = 1$ , carga unitaria sobre dientes de 250 N/mm, velocidad de rotación de entrada (piñón) de  $n_1 = 1\,000\text{min}^{-1}$  y cantidad de dientes en el piñón  $z_1 = 16$ .

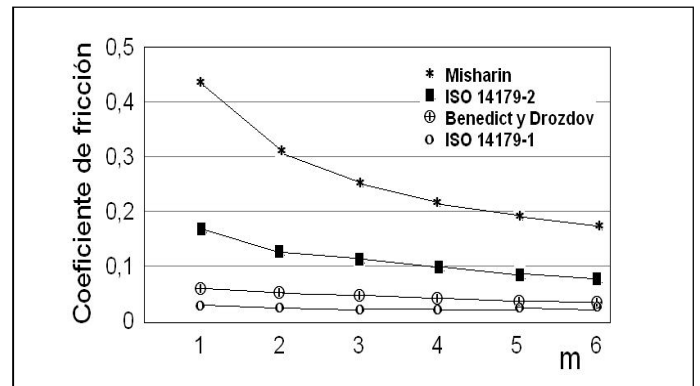


Fig. 11. Valores de coeficientes de fricción para engranajes con razón de transmisión  $u = 4$ , carga unitaria sobre dientes de 250 N/mm, velocidad de rotación de entrada (piñón) de  $n_1 = 1\,000\text{min}^{-1}$  y cantidad de dientes en el piñón  $z_1 = 16$ .

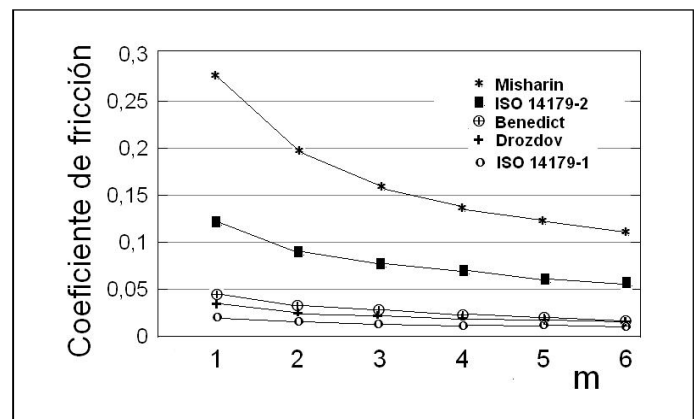


Fig. 12. Valores de coeficientes de fricción para engranajes con razón de transmisión  $u = 1$ , carga unitaria sobre dientes de 250 N/mm, velocidad de entrada (piñón)  $n_1 = 1\,000\text{min}^{-1}$  y número de dientes en piñón  $z_1 = 48$ .



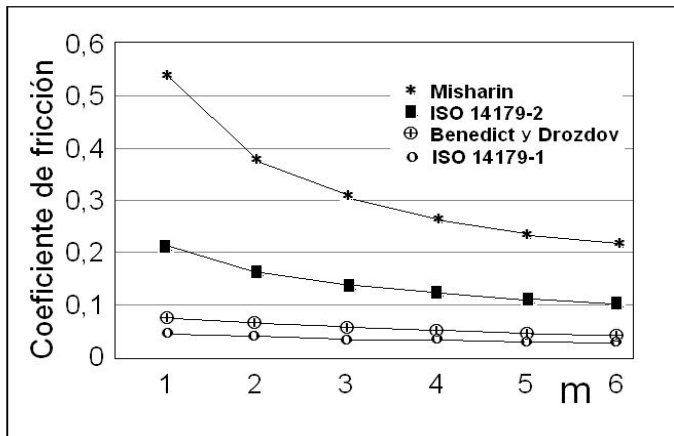


Fig. 13. Valores de coeficientes de fricción para engranajes con razón de transmisión  $u = 1$ , con carga unitaria sobre dientes de 250 N/mm, número de dientes en el piñón  $z_1 = 16$  y velocidad de entrada (piñón)  $n_1 = 500 \text{ min}^{-1}$ .

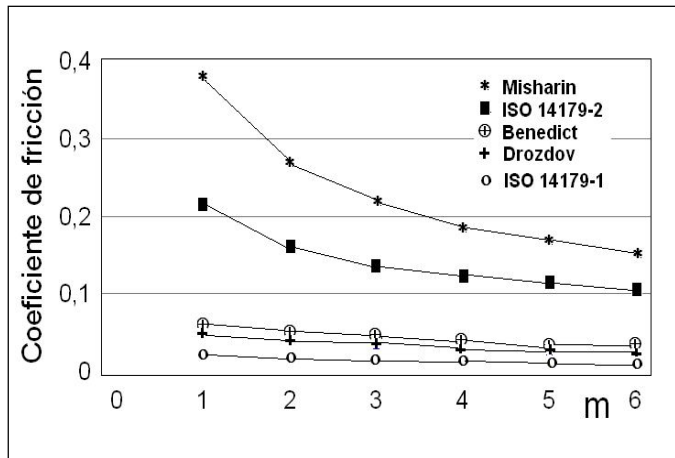


Fig. 14. Valores de coeficientes de fricción para engranajes con razón de transmisión  $u = 1$ , velocidad de rotación de entrada (piñón)  $n_1 = 1\,000 \text{ min}^{-1}$ , número de dientes en el piñón  $z_1 = 16$  y carga unitaria sobre dientes de 500 N/mm.

## CONCLUSIONES

- Empleando las ecuaciones declaradas en ISO/TR 14179-1 para evaluar la eficiencia del engranaje y analizando una interrelación con la geometría de las ruedas, la carga y velocidad de trabajo fue elaborado un modelo matemático de 21 relaciones, 32 variables y 11 grados de libertad.
- Fundamentado en un modelo matemático general fue desarrollado un modelo matemático orientado a dar solución al problema de la determinación de la eficiencia de un engranaje cilíndrico con fundamento en la norma ISO/TR 14179-1 y tomando en consideración una consecuente geometría del engranaje en la etapa de diseño y una posterior explotación basada en la velocidad y carga de trabajo de engranaje.
- Resultados del trabajo, compilados en las figuras 4, 5 y 7, muestran que las mayores eficiencias del engranaje cilíndrico de ruedas con dientes rectos, contacto exterior y ejes paralelos según ISO/TR 14179, se logran cuando la explotación se ejecuta a mayores velocidades y cargas.
- Resultados del trabajo y compilados en las figuras 2, 3, 6 y 8 confirman que, para una distancia entre ejes de ruedas, la mayor eficiencia se logra en los engranes con mayores cantidades de dientes en las ruedas y mayores razones de transmisión.
- Según las relaciones declaradas en ISO/TR 14179-1:2001 e ISO/TR 14179-2:2001 se obtienen los menores valores de coeficientes de fricción en los engranes cilíndricos con mayores velocidades de trabajo y mayores cantidades de dientes en las ruedas. Un resumen de algunos resultados se muestran en la tabla 2.
- La evaluación de varias propuestas para calcular el coeficiente de fricción en los engranajes muestran que un aumento de la carga específica en los engranes provoca un incremento del valor del coeficiente de fricción según ISO/TR 14179-2:2001 y Benedict-Kelly, mientras que produce una disminución según ISO/TR 14179-1:2001.
- El estudio demuestra que, a pesar de los actuales y avanzados resultados para evaluar la eficiencia de los engranes, aún existen discrepancias entre los diferentes procedimientos para la determinación de la eficiencia, atribuibles a la disparidad en las relaciones para evaluar el coeficiente de fricción entre los dientes en contacto.

Tabla 2

Coeficientes de fricción para engranes con razón de transmisión  $u = 1$ , módulo  $m = 3$ , viscosidad cinemática del lubricante  $\nu = 150 \text{ mm}^2/\text{s}$  rugosidad superficial media  $Ra = 6,3 \text{ }\mu\text{m}$  y  $b_w/a_w \approx 0,3$

$z_1$	$n_1$ rpm	$Ft/b$ N/mm	Coeficiente de fricción $f_m$				
			Misharin	ISO/TR 14179-2	Benedict	Drozdov	ISO/TR 14179-1
16	1 000	250	0,221	0,121	0,038	0,033	0,021
48	1 000	250	0,161	0,078	0,025	0,016	0,015
16	500	250	0,312	0,139	0,049	0,046	0,034
16	1 000	500	0,221	0,139	0,041	0,033	0,016

## REFERENCIAS

1. ISO. *Gears - Thermal capacity - Part 1: Rating gear drives with thermal equilibrium at 95 °C sump temperature*. ISO Technical Report 14179-1. ISO/IEC Office. Geneva. Switzerland. 2001.
2. ISO. *Gears - Thermal capacity - Part 2: Thermal load-carrying capacity*. ISO Technical Report 14179-2. ISO/IEC Office. Geneva. Switzerland. 2001.
3. PHILLIPS, ALLYN E. "The development of a practical thermal rating method for enclosed gear drives". American Gear Manufacturers Association (AGMA), Technical Paper 96FTM9. Virginia, 1996, p.8.
4. GONZÁLEZ REY, G. "Comentarios sobre el cálculo de la eficiencia de engranajes cilíndricos según reportes técnicos ISO/TR 14179 – 1 y 2". En *Actas de 5ta. Conferencia Internacional de Energía Renovable y Eficiencia Energética*. Ciudad de La Habana. Mayo 2007. pp 567-576.
5. HORI, K.; HAYASHI, I. and IWATSUKI, N. "Determination of the tooth surface friction coefficient of a pair or mating gears based on the distribution along the tooth profile precisely measured with the gravity pendulum method". In *Actas de ASME 2000, Design Engineering Technical Conference*, Paper DETC 2000/PTG-14371. Baltimore. September 2000, p.10
6. DROZDOV, Y. N. and GAVRIKOV, Y. A. "Friction and scoring under the conditions of simultaneous rolling and sliding bodies". *Wear*, 1967, p.291-302.
7. BENEDICT, G. H., KELLY, B. W. "Instantaneous coefficients of gear tooth friction". En *Actas de ASLE Lubrication Conference*. Illinois 1960. Transactions of ASLE, October, 1960, p.57-70.
8. MISHARIN, Y. A. "Influence of the friction condition on the magnitude of the friction coefficient in the case of rollers with sliding". In *Actas de International Conference on Gearing*, London 1958, Institute of Mechanical Engineering, p. 159-164.

## AUTORES

### Gonzalo González Rey

Ingeniero Mecánico, Doctor en Ciencias Técnicas, Profesor Auxiliar, Facultad de Ingeniería Mecánica, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, Ciudad de La Habana, Cuba. Miembro Académico de la Asociación Americana de Fabricantes de Engranajes (AGMA), Miembro Experto en el Comité Técnico de Engranajes de la Organización para la Normalización Internacional (ISOTC60). Vicepresidente del Comité Técnico de Normalización Cubano de Elementos de Máquina

### Alejandra García Toll

Ingeniera Mecánica, Máster en Diseño Mecánico, Profesora Auxiliar, Facultad de Ingeniería Mecánica, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, Ciudad de La Habana, Cuba. Miembro del Comité Técnico de Normalización Cubano de Elementos de Máquina, Experta en ISO-TC60.

### María Eugenia García Domínguez

Ingeniera Mecánica, Máster en Diseño Mecánico, Profesora Auxiliar, Facultad de Ingeniería Mecánica, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Ciudad de La Habana, Cuba. Miembro del Comité Técnico de Normalización Cubano de Elementos de Máquina

## Rational Design of Spur Gears Directed to Increase Efficiency and Decrease Loss by Friction

### Abstract

External parallel-axis cylindrical gears are considered as very efficient means for transmitting mechanical power, but for requirements of maximum efficiency in the current machines and equipments a precision in the procedures of calculation of power losses is necessary. In this sense, the Technical Report ISO / TR 14179-1:2001 offers formulas with empirical and theoretical bases to evaluate the gear efficiency considering gear mesh losses, windage and churning losses, and losses by bearings and seals. In particular, this article presents some results derived from a study of ISO/TR 14179-1:2001 and mathematical models described the interrelation of gear geometry, working parameters and efficiency. The results offer solution to the problem of increasing gear efficiency through a convenient relationship between the load, speed and rational gear geometry. Finally, through multiple regression a new formulation was estimated for the calculation of gear efficiency as a function of the load density, module, speed, gear ratio and number of pinion teeth.

Key words: spur gear, efficiency, coefficient of friction, ISO/TR 14179-1