

Heurística poliédrica de las cualidades periódicas en la variación de la divisibilidad numérica

Carlos Alberto Canino Ramos

Correo electrónico: canino@imre.oc.uh.cu

Instituto en Ciencia y Tecnología de los Materiales, Universidad de La Habana, Cuba

Artículo original

José Ricardo Díaz Caballero

Correo electrónico: joser@gest.cujae.edu.cu

Genovevo Morejón Vizcaíno

Correo electrónico: gmvizcaino@mecanica.cujae.edu.cu

Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, La Habana, Cuba

Resumen

El presente trabajo demuestra cómo la heurística poliédrica se revela también en el *Conjunto de los Números Naturales*, donde se manifiestan regularidades numéricas similares a las de los despliegues de los poliedros platónicos, que abren un amplio campo para el estudio de nuevas regularidades numéricas como aquellas asociadas a la periodicidad en la variación de su divisibilidad.

Palabras claves: heurística, poliedros platónicos, patrones comunes, periodicidad, altas restricciones, divisibilidad numérica

Recibido: 24 de agosto del 2012

Aprobado: 13 de noviembre del 2012

INTRODUCCIÓN

Las potencialidades de los poliedros platónicos y sus despliegues, fundamentadas en el artículo "Heurística de los poliedros platónicos para la investigación de la realidad de altas restricciones" [1], se revelan también en otro importante sistema de altas restricciones, a saber, el conjunto de los números naturales, donde se manifiestan regularidades análogas, patrones numéricos comunes a los de los poliedros en sus despliegues centrados, que a su vez abren un amplio campo para el estudio de nuevas regularidades numéricas de valor heurístico [2] para otros sistemas de altas restricciones.

Las regularidades de los números es un tema recurrente en la historia de las matemáticas. Desde la antigüedad los matemáticos han clasificado las regularidades de los números naturales, relacionándolas con figuras o cualidades. Tal es el caso de los números primos, compuestos, perfectos, defectivos, abundantes, deficientes, amigos, sociables, brillantes, figurativos (piramidales...), poligonales (triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales...) y otros.

Los números primos se emplean ampliamente en los análisis criptográficos. Una de las tareas que más tiempo ocupa a los grandes sistemas de ordenadores es el cálculo de números primos cada vez mayores con el objetivo de poder obtener un número que sirva para cifrar mensajes y, al mismo tiempo, difícil de ser descifrado. Usando números primos muy grandes se ha podido desarrollar en la práctica sistemas criptográficos llamados de *clave pública*.

Por su parte, los números brillantes, definidos por Peter Wallrodt, son aquellos con dos factores primos de la misma longitud (en notación decimal). Estos números se usan generalmente con propósitos criptográficos, y para determinar el rendimiento de los programas de factorización.

En lo que se refiere ya a los números figurativos y poligonales, hay que resaltar su gran aplicación en la *Matemática Discreta* para el estudio de patrones y la utilización de diferentes sistemas de representación empleados con propósitos didácticos y en la experimentación geométrica. Estos sistemas de representación han encontrado un amplio campo de aplicación en el estudio y elaboración de sistemas simbólicos de codificación válidos

para la expresión y comunicación de los conceptos y relaciones dentro de las estructuras numéricas y los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos, cuestiones y problemas que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica.

Los números poligonales son un ejemplo importante de patrones puntuales y, también se les suele considerar patrones geométricos o patrones aritméticos.

En las últimas décadas se está produciendo un cambio de enfoque en cuanto a la importancia que se le da en la enseñanza a algunas partes de la matemática, este es el caso del creciente interés por la *Matemática Discreta*, ampliamente utilizada en los negocios y en la industria.

En la enseñanza a los diferentes niveles, se proponen ejemplos, relacionados con la *Matemática Discreta*, incluidos en el contenido algebraico, geométrico, de probabilidad, de matrices, de teoría de grafos. Aparecen también ejemplos de tipo estratégico sobre pensamiento algorítmico, pensamiento crítico, técnicas para contar, iteración y recursión para el estudio de regularidades o patrones.

Los números naturales son un campo de trabajo privilegiado en *Matemática Discreta*, constituyendo uno de los modelos fundamentales en este tipo de matemática. Un mayor dominio y profundización en los sistemas de representación de los números naturales, enfatizando el análisis de la estructura de los números, el descubrimiento de patrones y la búsqueda de regularidades, se ponen en marcha en algunos de los procedimientos y estrategias básicas de la *Matemática Discreta* [3], [4].

A continuación se centrará el análisis en una cualidad periódica de la variación de la divisibilidad en el Conjunto de los Números Naturales, asociada a los múltiplos de seis (posiciones $6n$, para $n \geq 1$), la cual tiene un elevado potencial heurístico para los sistemas de altas restricciones y los patrones numéricos comunes estudiados de los poliedros platónicos en [1].

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS PRIMOS RELACIONADAS CON LA PERIODICIDAD EN LA VARIACIÓN DE LA DIVISIBILIDAD NUMÉRICA

Los números primos tienen propiedades relacionadas a posiciones específicas donde único se pueden encontrar dentro del conjunto de números naturales:

- Todo número primo mayor que 2 es de la forma $4n+1$ o $4n-1$ (" $4n\pm 1$ ").
- Todo número primo mayor que 3 es de la forma $6n+1$ o $6n-1$ (" $6n\pm 1$ ").

Estas propiedades de los números primos evidencian que dentro del conjunto de los números impares ($2n+1$ o $2n-1$; es decir, $2n\pm 1$, para $n \geq 1$), los números primos (exceptuando al 2 y al 3) están restringidos a los impares de las formas $4n\pm 1$ o $6n\pm 1$ (para $n \geq 1$). Todas las formas $6n\pm 1$ son

contenidas en las formas $4n\pm 1$, ya que estas últimas son de mayor frecuencia. Como la forma $6n\pm 1$ es la de menor frecuencia, define un conjunto que restringe más las posibilidades, de aquí que los números primos mayor que 3 son de la forma $4n\pm 1$, que cumple a su vez con la forma $6n\pm 1$.

Por ser la forma $6n\pm 1$, la más "exigente", se puede inferir que si un número es primo y mayor que 3, este se va a localizar, solo y tan solo, delante o detrás (± 1) de un múltiplo de seis ($6n$).

El esquema utilizado por K. P. Swallow [5] en la figura 1, ilustra gráficamente que los números primos mayores que 3 son de la forma $6n\pm 1$, ya que organiza a los números naturales en 6 columnas. De esta manera los números primos solo van a aparecer en la 5ta. y en la 1ra. columnas, es decir, en las posiciones $6n\pm 1$.

El algoritmo utilizado por K. P. Swallow, se levanta sobre la base del primer método que registra la historia para obtener los números primos: la conocida *Criba de Eratóstenes*.*

La *Criba de Eratóstenes* es un método sencillo de encontrar la serie de números primos inferiores a un número dado, mediante supresiones ordenadas de números compuestos.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	d	

Fig. 1. Esquema utilizado en la Criba de Swallow

* Una criba es un colador o filtro. Eratóstenes, matemático y filósofo griego del siglo III a. C., escribió en una plancha metálica tres o cuatro mil números que fue contando de dos en dos primero, con lo que tenía los múltiplos de dos, después hizo agujeros en los lugares correspondientes; luego contó de tres en tres e hizo nuevos agujeros; luego cada cinco, y así sucesivamente. Los números no tachados, los que quedaban, eran los primos.

En primer lugar se tachan los pares (los múltiplos de 2) sin tachar al propio 2, después, de la misma forma se hace para los múltiplos de 3, de 5 y así sucesivamente. Los números no tachados que quedan, son los primos.

Lo particular del algoritmo de Swallow (figura 1) es que al escribir los números en 6 columnas, hace visible la distribución de los números primos en las posiciones $6n \pm 1$. De esta forma se tachan las columnas del 2 (no incluyéndole) las del 4 y el 6, por ser pares, luego se tacha la columna del 3 (sin incluirlo), por ser múltiplos de 3. Así, las columnas del 1 y el 5 (posiciones $6n \pm 1$) son las únicas que no quedan tachadas (de forma vertical y completa), ya que es donde van a ir quedando los números primos. Más adelante, a partir del 5 (sin tachar) con las líneas a, b, c y d se tachan los múltiplos del 5. Los múltiplos de 7 se tachan con las líneas i, ii y iii. Los que quedan son los números primos (hasta el 100 para este caso).

LOS MÚLTIPLOS DE 6 Y SU ALTA DIVISIBILIDAD

Los números primos son la expresión mínima de divisibilidad, pues solo se dividen por la unidad y ellos mismos (solo dos divisores). Sin embargo, los primos mayores que 3, solo se pueden encontrar delante o detrás de un múltiplo de 6 (posiciones $6n \pm 1$), que son números de alta divisibilidad pues poseen muchos divisores.

La alta divisibilidad de los múltiplos de 6, se ha venido aplicando durante siglos en el sistema sexagesimal, que es el que se utiliza en los sistemas de medición angular, como las coordenadas geográficas en los mapas. Esto se encuentra dado, por su eficacia para representar fracciones, como se puede observar en la tabla 1. En el sistema sexagesimal, al ser de base 60 (múltiplo de 6 que tiene muchos divisores), las fracciones de ángulo se expresan "cómodamente", casi siempre con números enteros (tabla 1). El sistema sexagesimal es el sistema de 360° de subbase 10, su unidad es el grado sexagesimal ($^\circ$).

Fracciones vulgares	Sistema sexagesimal	Sistema decimal
1/2	0,30	0,5
1/3	0,20	0,3333333
1/4	0,15	0,25
1/5	0,12	0,2
1/6	0,10	0,1666666
1/8	1,07:30	0,125
1/9	0,06:40	0,1111111
1/10	0,06	0,1
1/12	0,05	0,8333333
1/15	0,04	0,0666666
1/16	0,03:45	0,0625
1/18	0,03:20	0,0555555
1/20	0,03	0,05
1/30	0,02	0,0333333
1/40	0,01:30	0,025
1/50	0,01:12	0,02
1/60	0,01	0,0166666

Como se puede apreciar en la tabla 1, los resultados de fracciones, que en el sistema decimal constituyen infinitas periódicas, son en el sistema sexagesimal exactos.

Los métodos de medida del tiempo se fundamentaron desde sus comienzos en el sistema sexagesimal, con la diferencia que la división del día es 24 horas (2×12 horas) de 60 minutos, y cada minuto en 60 segundos. Los números 12 y 24, que al igual que el 60, son múltiplos de 6 y por tanto son de gran cantidad de divisores (tabla 2).

Para ilustrar la alta divisibilidad de los múltiplos de seis (posiciones $6n$), en la tabla 3 se muestra la descomposición en factores simples de los números del 1 al 25, y su cantidad de divisores.

En la tabla 3 se ha resaltado las posiciones de los múltiplos de seis, para visualizar el aumento de la cantidad de divisores en consecuencia con la complejidad de sus factores simples. Lo mismo se hizo con las posiciones $6n \pm 1$, para mostrar cómo ocurre totalmente lo contrario.

Números	Cantidad de divisores	Divisores
6	4	1, 2, 3, 6
12	6	1, 2, 3, 4, 6, 12
24	8	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
60	12	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60
360	24	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360

Tabla 3. Descomposición de los números del 1 al 25 en sus factores simples, con su correspondiente cantidad de divisores.

Números del 1 al 13	Descomposición en factores simples	Cantidad de divisores	Números del 13 al 25	Descomposición en factores simples	Cantidad de divisores
1	$1=1$	1	13	$13=13$	2
2	$2=2$	2	14	$14=2 \times 7$	4
3	$3=3$	2	15	$15=3 \times 5$	4
4	$4=2^2$	3	16	$16=2^4$	5
5	$5=5$	2	17	$17=17$	2
6	$6=2 \times 3$	4	18	$18=2 \times 3^2$	6
7	$7=7$	2	19	$19=19$	2
8	$8=2^3$	4	20	$20=2^2 \times 5$	6
9	$9=3^2$	3	21	$21=3 \times 7$	4
10	$10=2 \times 5$	4	22	$22=2 \times 11$	4
11	$11=11$	2	23	$23=23$	2
12	$12=2^2 \times 3$	6	24	$24=2^3 \times 3$	8
13	$13=13$	2	25	$25=5^2$	3

De tal modo, se puede observar con facilidad que cada vez que aparece un múltiplo de (6, 12, 18 y 24), hay un aumento significativo de la complejidad de sus factores simples (con relación a los números definidos entre dos $6n$ contiguos), y por tanto un aumento de la cantidad de divisores. Todo lo contrario para las posiciones $6n \pm 1$ (5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 25), donde hay una disminución significativa de la complejidad de sus factores simples y una disminución de la cantidad de divisores.

La esencia de este fenómeno radica en que el 6 es el primer número natural que es producto de dos factores simples diferentes: $2 \times 3 = 6$. Esta "complejidad" del número 6 de ser el primero que es producto de dos factores simples diferentes, no vuelve a ocurrir hasta el número 10: $2 \times 5 = 10$ (tabla 3).

De tal forma el 6 y sus múltiplos toman ventaja en la "carrera" de la complejidad numérica (relacionada con la descomposición en factores simples), sin posibilidad alguna para ningún "rival". Por ejemplo, una complejidad similar a la de los factores simples del 12, no se alcanza por otro número hasta el 20, y así sucesivamente.

ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LAS VARIACIONES DE LA DIVISIBILIDAD NUMÉRICA, EN FUNCIÓN DE ENCONTRAR CUALIDADES PERIÓDICAS

En el conjunto de los números naturales se tiene la sucesión alternada de números impares ($2n \pm 1$, para $n \geq 1$) y pares ($2n$, para $n \geq 1$). Es decir, después de un número impar existe un par, y después de uno par se tiene un impar, y así sucesivamente. La divisibilidad tiende a aumentar con los números pares, sucediendo lo contrario con los impares. Esto se puede ilustrar al observar cómo varía la cantidad de divisores [según $d(n)$] * cuando se pasa de un número para un número impar y viceversa (tabla 4).

Sin embargo, dentro de los números pares se observa un brusco aumento de la cantidad de divisores en los múltiplos de 6 (subrayados, en tabla 5) y también una significativa disminución de la cantidad de divisores en las posiciones $6n \pm 1$. En el esquema de análisis de la tabla 5, además de la función de la cantidad de divisores $d(n)$, se ha añadido la función de la cantidad de coprimos $\varphi(n)$, que es la función φ de Euler.**

La función φ de Euler [$\varphi(n)$] se comporta de manera contraria a la de $d(n)$. Mientras más divisores tenga un número n dado, entonces menos coprimos tiene y viceversa.

* La función de divisores por número $d(n)$, da la cantidad de divisores que tiene un número dado n .

**La función φ de Euler es una función importante en teoría de números. Si n es un número entero positivo, entonces $\varphi(n)$ se define como el número de enteros positivos menores o iguales a n y coprimos con n . Por ejemplo, $\varphi(10) = 4$, porque cada uno de los cuatro números 1, 3, 7 y 9 es coprimo o primo relativo con 10.

Serie n (para $n \geq 1$)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,...
# divisores $d(n)$	1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 2, 4, 4, 5, 2, 6, 2,...

Nota: Se han resaltado los números pares y su cantidad de divisores [dados por la función $d(n)$].

Serie n (para $n \geq 1$)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, ..
# divisores $d(n)$	1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 2, 4, 4, 5, 2, 6, 2,...
# coprimos ($\varphi(n)$)	1, 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6, 4, 10, 4, 12, 6, 8, 8, 16, 6, 18,...

Nota: Para destacar se han subrayado los múltiplos de 6 y sus parámetros $d(n)$ y $\varphi(n)$.

Por ejemplo, para los números primos (p), que solo se dividen por la unidad y el propio número, la función $d(p)$ tiene el mínimo valor posible de 2. Por el contrario, $\varphi(p)$ alcanza los valores mayores posibles (según la magnitud del p), pues al tener los números primos la cantidad mínima de divisores posibles, entonces tiene la mayor cantidad de coprimos posibles (según su magnitud en cada caso). Para un número primo (p) el valor de $\varphi(p)$ es igual al valor del número primo disminuido en una unidad ($p-1$).

Por tanto, si para los múltiplos de 6, la función $d(n)$ tiene los valores máximos relativos al intervalo entre dos de estos múltiplos sucesivos, entonces la función $\varphi(n)$ alcanzará sus valores mínimos relativos. En lo adelante se selecciona la función $\varphi(n)$ para estudiar la periodicidad de la variación de la divisibilidad, por ser más representativa del fenómeno.

INTERVALO PERIÓDICO SIMPLE DE LA VARIACIÓN DE LA DIVISIBILIDAD NUMÉRICA

El **intervalo periódico simple de la variación de la divisibilidad numérica (IPS)** es aquel intervalo conformado por las 7 posiciones de elementos numéricos, limitados por múltiplos de 6 contiguos [$6n \div 6(n+1)$, para $n \geq 1$] (tabla 6).

Propiedad de periodicidad del IPS: El IPS es un intervalo periódico de la variación de la divisibilidad numérica dentro del conjunto de los números naturales.

Para analizar el comportamiento periódico de la variación de la divisibilidad que caracteriza a los IPS, en este trabajo se organiza a los números naturales en una tabla de 7 columnas correspondientes al intervalo $6n \div 6(n+1)$. Siendo las 2 columnas extremas, los múltiplos de seis (posiciones $6n$) contiguos, y las 5 columnas internas los elementos correspondientes en su seno (ver tabla 6).

Al construir la tabla 6 de 7 columnas, se parte del ordenamiento numérico empleado por K. P. Swallow (figura 1), adicionándole a la izquierda la columna final (de los $6n$) desplazada [$6(n+1)$], con el objetivo de completar al IPS [$6n \div 6(n+1)$] (tabla 6). No se tiene en cuenta los primeros

números naturales del 0 al 6, ya que el primer IPS que se define entre dos $6n$ contiguos es el intervalo del 6 al 12.

En la última fila se indica con puntos suspensivos que las secuencias continúan hasta el infinito. Lo que se muestra en la tabla 6 es una sección del ordenamiento de los números naturales según el IPS.

Las 7 columnas de la tabla 6 están numeradas en la primera fila. En la segunda fila aparece representado el tipo de divisibilidad de cada columna. Por ejemplo, la representación de $3n$ (para n impares en este caso), significa que la columna central No. 4 tiene como único factor común (diferente del 1) al 3. A partir de esta columna central de $3n$, las columnas se distribuyen en tres parejas equidistantes o simétricas a esta, representadas como $2n$, $6n \pm 1$, $6n$. De tal forma, las 7 posiciones se resumen en 4 tipos de divisibilidad centradas. Los tonos grises en la tabla 6 se han usado para resaltar la simetría de distribución de estos 4 tipos de divisibilidad: $2n$, $3n$, $6n$, $6n \pm 1$.

No.1	No.2	No.3	No.4	No.5	No.6	No.7
$6n$	$6n \pm 1$	$2n$	$3n$	$2n$	$6n \pm 1$	$6n$
6	7	8	9	10	11	12
12	13	14	15	16	17	18
18	19	20	21	22	23	24
24	25	26	27	28	29	30
30	31	32	33	34	35	36
36	37	38	39	40	41	42
42	43	44	45	56	57	48
48	49	50	51	52	53	54
54	55	56	57	58	59	60
60	61	62	63	64	65	66
...

PROPIEDADES DE VARIACIÓN DE LA DIVISIBILIDAD DEL IPS

El IPS tiene 4 tipos de divisibilidad ($3n$, $2n$, $6n \pm 1$, $6n$) distribuidas de forma centrada en sus 7 elementos (tabla 6):

1. La posición central de números impares de la forma $3n$ (para los n impares) con los factores comunes 1 y 3 (columna central No. 4).

2. La primera pareja centrada (a la posición $3n$), es de números pares de la forma $2n$ (para n que no sean

múltiplos de 3), con los factores comunes 1 y 2 (columnas No. 3 y No. 5).

3. La segunda pareja centrada (a la posición $3n$), es de números impares de la forma $6n \pm 1$ (para $n \geq 1$), con el 1 como único factor común (columnas No. 2 y No. 6).

4. La tercera y última pareja centrada (a la posición $3n$), es de números pares de la forma $6n$ (para $n \geq 1$), con los factores comunes 1, 2, 3 y 6 (columnas No. 1 y No. 7).

Estos 4 tipos de divisibilidad se diferencian por factores comunes, que son los propios divisores del 6: 1, 2, 3 y 6.

En la tabla 7 se muestran los resultados de la función $\varphi(n)$ en correspondencia con la tabla 6 (valores de n), lo cual se manifiesta manteniendo las cabeceras (dos primeras filas).

En la última fila de la tabla 7, se emplean signos aritméticos (+ y -) con el objetivo de ilustrar la variación relativa de la divisibilidad de una columna respecto a otra. Esta variación de la divisibilidad es contraria a la variación de los valores de $\varphi(n)$ que pueden ser denotados como sigue:

- (+ +) columnas que tienen los valores máximos de divisibilidad [mínimos de $\varphi(n)$].

- (- -) columnas que tienen los valores mínimos de divisibilidad [máximos de $\varphi(n)$].

- (+) columnas que tienen los valores "medios altos" de divisibilidad ["medios bajos" de $\varphi(n)$].

- (-) columnas que tienen los valores "medios bajos" de divisibilidad ["medios altos" de $\varphi(n)$].

No.1	No.2	No.3	No.4	No.5	No.6	No.7
$6n$	$6n \pm 1$	$2n$	$3n$	$2n$	$6n \pm 1$	$6n$
2	6	4	6	4	10	4
4	12	6	8	8	16	6
6	18	8	12	10	22	8
8	20	12	18	12	28	8
8	30	16	20	16	24	12
12	36	18	24	16	40	12
12	42	20	24	22	46	16
16	42	20	32	24	52	18
18	40	24	36	28	58	16
16	60	30	36	32	48	20
...
++	--	+	-	+	--	++

Con el término "medios bajos" o "medios altos", se refiere a valores medios que no llegan a los extremos, pero hay unos que son más bajos y otros más altos, y de aquí que se especifica la diferencia. Estas variaciones son relativas entre columnas por cada fila y se encuentran de forma simétrica a la columna central, en correspondencia con la forma en que se distribuyen los tipos de divisibilidad ($2n, 3n, 6n, 6n\pm 1$) mostrados en la fila 2 (tablas 7 y 8). La tabla 9 resume lo expresado

En las 7 posiciones del IPS, las 3 parejas centradas definen los grupos en valores de 3, 5 y 7 con respecto al elemento unidad $3n$. El valor de 3 es dado por la elongación de elementos que alcanza la 1ra. pareja, el de 5 por la elongación de elementos de la 2da. pareja y el de 7, la elongación de la 3ra. pareja (tabla 8). Se constata aquí que también el IPS cumple con el patrón común del incremento centrado 1, 3, 5, 7 y el patrón de las 3 parejas centradas, analizados en el despliegue de los poliedros en [1].

Definición de la posición de menor divisibilidad relativa a un IPS: Corresponde a las posiciones $6n\pm 1$, que es donde se encuentran los números con la menor cantidad de divisores (mayor cantidad de coprimos), relativas a las demás posiciones del IPS.

Tabla 8
Posiciones equidistantes (en forma de tres parejas centradas a la columna $3n$) de las variaciones de la divisibilidad, en correspondencia con su distribución tipo ($3n, 2n, 6n\pm 1, 6n$).

No.1	No.2	No.3	No.4	No.5	No.6	No.7
$6n$	$6n\pm 1$	$2n$	$3n$	$2n$	$6n\pm 1$	$6n$
++	--	+	-	+	--	++

Tabla 9
Resumen de los cuatro tipos de divisibilidad que se definen en el IPS según la distribución de las columnas en las tablas 6, 7 y 8

Columnas tipo	No.4	No. 3, No. 5	No. 2, No. 6	No. 1, No. 7
Representación	$3n$	$2n$	$6n\pm 1$	$6n$
Factores comunes	1 y 3	1 y 2	1	1, 2, 3 y 6
Fluctuación de los valores $d(n)$ y $\varphi(n)$ respectivamente	$d(n) -$	$d(n) +$	$d(n) --$	$d(n) ++$
	$\varphi(n) +$	$\varphi(n) -$	$\varphi(n) ++$	$\varphi(n) --$
	Valores medios	Valores medios	Valores extremos	Valores extremos
Posiciones relacionadas con la simetría centrada a $3n$	Central	Colateral interna	Colateral externa	Externas

El hecho de que el número primo se encuentre o no en las posiciones $6n\pm 1$ (según la figura 1 y la tabla 6), no es un fenómeno periódico, ya que esta condición es necesaria pero no suficiente. Estas posiciones $6n\pm 1$ en sí mismas no determinan que se encuentre un número primo, sino indica dónde único puede estar. A pesar de que la aparición de los números primos es aleatoria, las posiciones $6n\pm 1$ tienen en sí mismas un carácter periódico. Ello explica por qué se encuentran los números primos en estas posiciones y no otras, ya que es donde periódicamente disminuye con mayor intensidad la divisibilidad, a tal punto que puede aparecer un número primo.

Los números primos son la expresión mínima de divisibilidad, pues solo se dividen por la unidad y ellos mismos (solo 2 divisores). De aquí que si la divisibilidad varía periódicamente, a los números primos le corresponde las posiciones periódicas $6n\pm 1$ de menor divisibilidad.

TENDENCIA DE LA VARIACIÓN DE LA DIVISIBILIDAD DEL IPS

El comportamiento de la periodicidad de la divisibilidad de los números naturales se muestra en la figura 2 [realizada con MATLAB versión 7.0.0.19920 (R14)]. Los valores en la gráfica se obtuvieron a partir de la tabla 7, sobre los cuales se aplica un filtro y un proceso de normalización. El filtro consiste en sumar por columnas los elementos de cada fila precedente. Por ejemplo, la fila tres es la suma (por columna) de la uno, más la dos, más la tres y así sucesivamente. Esto se hace con el objetivo de amortiguar las fluctuaciones.

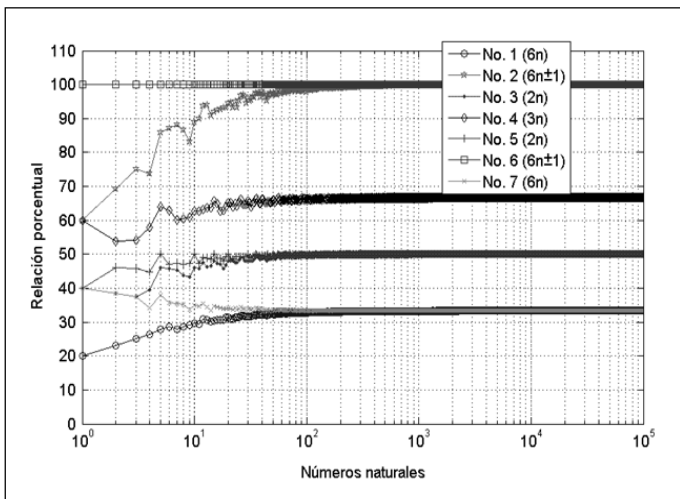


Fig. 2. Comportamiento de la tendencia de las 4 cualidades de divisibilidad en el IPS

El proceso de normalización se efectúa para compensar el crecimiento significativo de los valores de la función $\varphi(n)$. La normalización consiste en dividir el nuevo valor de cada fila por el elemento de la columna de mayor valor (que es la No. 6, posición $6n \pm 1$), para después multiplicarse por 100. De modo que todos los valores queden expresados en relación porcentual con respecto a los valores de la columna No. 6.

Como se puede observar en el gráfico de la figura 2, después de las primeras 100 posiciones en el eje de las X, queda definida la tendencia de comportamiento en el eje de las Y.

En esta gráfica se ilustra la tendencia de (n) , correspondiente a los *cuatro tipos de divisibilidad* que caracterizan al IPS. Con respecto al valor máximo normalizado al 100 %, la tendencia de los otros valores corresponde al 66,67 %, 50 % y al 33,33 %. Estos valores han sido aproximados a 70 %, 50 % y 30 % respectivamente en la tabla 10.

Como $\varphi(n)$ es contraria a la divisibilidad, se tiene que el valor máximo porcentual normalizado al 100 % corresponde a las posiciones $6n \pm 1$, que son las posiciones de mínima divisibilidad (donde se pueden encontrar los números primos).

Tabla 10 Distribución porcentual de los valores de $\varphi(n)$, según la distribución de los 4 tipos de divisibilidad ($3n, 2n, 6n \pm 1, 6n$) en el IPS. Estos valores son contrarios a la variación de la divisibilidad mostrada en la última fila						
No.1	No.2	No.3	No.4	No.5	No.6	No.7
$6n$	$6n \pm 1$	$2n$	$3n$	$2n$	$6n \pm 1$	$6n$
30 %	100 %	50 %	70 %	50 %	100 %	30 %
++	--	+	-	+	--	++

El valor mínimo porcentual aproximado a 30 %, corresponde a las posiciones $6n$ de máxima divisibilidad.

El gráfico ilustra cómo las 7 curvas concurren en 4, que corresponden a los 4 tipos de divisibilidad en el IPS [$3n$ (No.4), $2n$ (No.3, No.5), $6n \pm 1$ (No.2, No.6), $6n$ (No.1, No.7)]. El valor de estas 4 posiciones se mantiene constante con el aumento de los números, ilustrando cómo estas cualidades se cumplen periódicamente en el conjunto de los números naturales.

CUALIDADES DEL IPS BASADAS EN SUS ELEMENTOS DE SIMETRÍA

Elementos de simetría del IPS

El IPS se puede organizar de dos formas simétricas a una posición central, según se alternen las posiciones $3n$ y $6n$ en su centro o extremos:

- Centrado a $3n$ con $6n$ en los extremos (tabla 11).
- Centrado a $6n$ con $3n$ en los extremos (tabla 12).

Las posiciones $3n$ y $6n$ que determinan las dos formas simétricas de organizar el intervalo periódico, en cuanto al centro y extremos de la misma, se nombran elementos de simetría.

Definición de elementos de simetría de un IPS: Son las posiciones a partir de las cuales se repiten "a espejo" los mismos tipos de divisibilidad a ambos lados.

Los elementos de simetría determinan el centro de simetría del IPS según las dos formas en que se estructure, centrado a un $3n$ o centrado a un $6n$.

Definición de subintervalos de un IPS: Son los subintervalos definidos entre dos elementos de simetría contiguos dentro de un IPS, en sus posiciones centro y extremo respectivamente.

Un IPS está integrado por 3 elementos de simetría que contienen en su seno a 4 elementos, 2 por subintervalos ($2 \times 2 = 4$), para un total de 7 elementos ($3 + 2 \times 2 = 7$). De esta forma también se cumple el patrón común numérico de 3, similar a los patrones numéricos analizados en [1].

Tabla 11 IPS centrado a un múltiplo de 3 impar ($3n$), con múltiplos de 6 en sus extremos ($6n$)						
$6n$	$6n \pm 1$	$2n$	$3n$	$2n$	$6n \pm 1$	$6n$
6	7	8	9	10	11	12
12	13	14	15	16	17	18
...

Tabla 12 IPS centrado a un múltiplo de 6 ($6n$) con múltiplos de 3 impar en sus extremos ($3n$)						
$3n$	$2n$	$6n \pm 1$	$6n$	$6n \pm 1$	$2n$	$3n$
3	4	5	6	7	8	9
9	10	11	12	13	14	15
...

En la tabla 13, filas A y B, se muestra el IPS en sus dos formas simétricas básicas, centrado a $6n$ en A, y centrado a $3n$ en B. En la fila C se observa un intervalo compuesto (IC) que contiene a los dos IPS de A y B fusionados.

Definición de intervalo compuesto (IC): Es aquel intervalo que tiene los elementos mínimos y suficientes para contener a dos IPS fusionados en sus dos formas simétricas.

Los IC no tienen centro de simetría y pueden empezar en $3n$ (de un IPS centrado en $6n$) y terminar en $6n$ (de un IPS centrado en $3n$), según la tabla 13 y viceversa, según la tabla 14.

Los subintervalos para los IC quedan definidos entre los elementos de simetría centro y extremo de sus dos IPS internos.

Definición de intervalo múltiplo (IM): Es aquel intervalo que contiene a múltiplos de IPS, uno a continuación de otro, sin estar fusionados.

En un IM todos los IPS tienen la misma forma simétrica, al encontrarse uno a continuación del otro.

En la tabla 15 se muestra un intervalo que es un IM (fila C) formado por una cantidad par de 2 IPS (fila A y B) consecutivos. Los elementos de simetría centro y extremos del IM resultante son de $6n$. De esta forma los IM pares tienen en sus extremos y centros el mismo elemento de simetría.

Tabla 13
Intervalo compuesto $3n - 6n$ en la fila C, que contiene a los IPS de las filas A y B de forma fusionada

	$3n$	$2n$	$6n \pm 1$	$6n$	$6n \pm 1$	$2n$	$3n$	$2n$	$6n \pm 1$	$6n$
A	3	4	5	6	7	8	9			
B				6	7	8	9	10	11	12
C	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Tabla 14
Intervalo compuesto $6n - 3n$ en la fila C, que contiene a los IPS de las filas A y B de forma fusionada

	$6n$	$6n \pm 1$	$2n$	$3n$	$2n$	$6n \pm 1$	$6n$	$6n \pm 1$	$2n$	$3n$
A	6	7	8	9	10	11	12			
B				9	10	11	12	13	14	15
C	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Tabla 15
Intervalo múltiplo de 2 IPS en la fila C, que contiene a los IPS de las filas A y B de forma continua

	$6n$	$6n \pm 1$	$2n$	$3n$	$2n$	$6n \pm 1$	$6n$	$6n \pm 1$	$2n$	$3n$	$2n$	$6n \pm 1$	$6n$
A	6	7	8	9	10	11	12						
B							12	13	14	15	16	17	18
C	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

En la tabla 16 se muestra un IM (fila D) formado por una cantidad impar de 3 IPS (fila A, B y C) consecutivos. Los extremos ($6n$) y centro ($3n$) del IM resultante son de elementos de simetría alternados como un IPS. De esta forma los IM impares tienen sus elementos de simetría centro y extremos distribuidos de manera alternada como el IPS.

Los subintervalos del IM se definen entre los elementos de simetría centro y extremo del propio IM. Para el caso del IM de 2 IPS de la tabla 15, son de 5 elementos y, para el caso de la tabla 16, de 8 elementos.

Despliegue del IPS

La heurística de los poliedros platónicos aplicada a este fenómeno numérico, revela regularidades de interés para la teoría de los números.

Teniendo en cuenta que los *despliegues centrados* en los poliedros platónicos conllevan un incremento hasta siete (patrón 1, 3, 5, 7), se procede a incrementar el intervalo simple siete veces para obtener un IM de 7 IPS (tabla 17).

Para ello se toma un IPS dado, como es el de 6 a 12 (de extremos $6n$ y centro $3n$) y se extiende en un primer incremento de +6, hasta alcanzar el próximo elemento extremo de $6n$, que en este caso es el 18 (de 6 a 18, 13 elementos). En el próximo incremento, de la misma forma se adicionan seis elementos más hasta el 24 (de 6 a 24, 19 elementos). Así sucesivamente se va extendiendo +6, hasta alcanzar en el séptimo paso al 48 (de 6 a 48, 43 elementos). Estos incrementos del IPS inicial hasta el IM de 7 IPS se ilustran en la tabla 17 y se caracterizan en la tabla 18

Los IM resultantes de las cantidades de IPS pares 2, 4 y 6, tienen a $6n$ en sus extremos y centro. Los IM resultantes de las cantidades IPS impares 3, 5, y 7, tienen a $6n$ en sus extremos y a $3n$ en su centro como el IPS inicial.

Como los IM impares tienen elementos de simetría alternos en su centro y extremos, pueden estructurarse en sus "IC correspondientes" de la misma forma que los IPS, que en este caso serían *Intervalos Múltiplos Compuestos (IMC)*. Los subintervalos para los IMC quedan definidos entre los elementos de simetría centro y extremo de sus dos IM internos.

En la tabla 18 se ilustran algunas cualidades de los IC y IMC correspondientes que se obtienen a partir de los IM impares de los incrementos realizados hasta 7 IPS. De izquierda a derecha se tiene:

- a) El número de orden de los incrementos (1, 2, 3...) en la primera columna.
- b) Las posiciones que ocupan los elementos de simetría en los extremos y centros.
- c) Las cantidades de elementos totales en cada intervalo.
- d) Los elementos por subintervalos.
- e) La cantidad de elementos totales correspondiente a su extensión a IC o IMC respectivamente.
- f) La suma total de los elementos de los subintervalos de los IC correspondientes.

Tabla 16
Intervalo múltiplo de 3 IPS en la fila C, que contiene a los IPS de las filas A, B, C de forma continua

	6n	6n±1	2n	3n	2n	6n±1	6n	6n±1	2n	3n	2n	6n±1	6n	6n±1	2n	3n	2n	6n±1	6n	
A	6	7	8	9	10	11	12													
B							12	13	14	15	16	17	18							
C													18	19	20	21	22	23	24	
D	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	

Tabla 17
Despliegue del IPS

6n	3n	6n
6, 7, 8, 9, 10, 11, 12		
6n	6n	6n
6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18		
6n	3n	6n
6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24		
6n	6n	6n
6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30		
6n	3n	6n
6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36		
6n	6n	6n
6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19... 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37... 42		
6n	3n	6n
6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19... 27, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39... 48		

Tabla 18
Patrones del despliegue del IPS hasta alcanzar un IM de 7 IPS

No.	Posiciones de los elementos de simetría en los intervalos			Cantidad de elementos totales en los intervalos	Elementos por subintervalos	Cantidad de elementos totales en los correspondientes IC o IMC	Suma de todos los elementos en los subintervalos en IC o IMC
	6n (inicial)	3n o 6n (central)	6n (final)				
1	6	9	12	7	2	10	6
2	6	12	18	13	5	---	---
3	6	15	24	19	8	28	24
4	6	18	30	25	11	---	---
5	6	21	36	31	14	46	42
6	6	24	42	37	17	---	---
7	6	27	48	43	20	64	60

En la última fila, a la derecha se han resaltado los resultados finales de los valores 20, 64 y 60, y a la izquierda las condiciones impares 1, 3, 5 y 7, en las cuales se mantiene la posición central de $3n$. Dichos valores (resaltados en la tabla 18) también son comunes a los patrones numéricos analizados para los poliedros regulares en [1].

ANÁLISIS DE LOS IPS EN DOS DIRECCIONES A PARTIR DE UN ELEMENTO DE SIMETRÍA

Un *elemento de simetría* dado (cualquier $3n \geq 9$; o cualquier $6n \geq 12$), tomado como punto de partida, permite hacer un análisis de las propiedades de simetría de los IPS en las dos direcciones posibles (izquierda y derecha) (tabla 19).

Si se distribuyen los tipos de divisibilidad que resultan de dos IPS centrados a un elemento de simetría dado, según las 12 posiciones de los números en un reloj analógico (figura 3), se obtienen las 12 posiciones que caracterizan a las propiedades de simetría del IPS en dos direcciones de análisis.

De esta forma también se cumple el patrón común numérico de 12, similar a los patrones numéricos de los poliedros regulares analizados en [1].

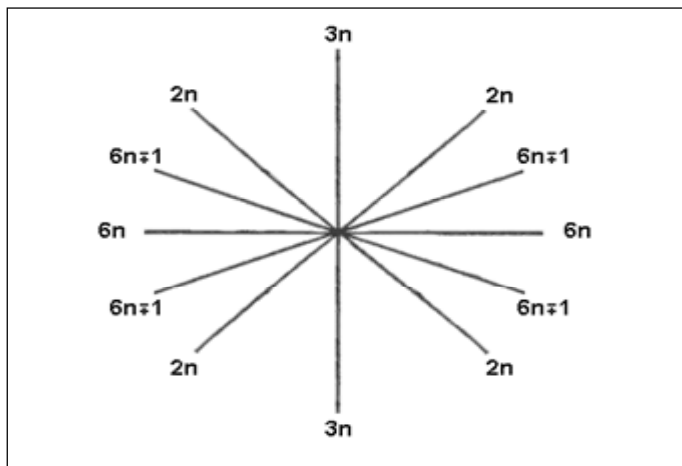


Figura 3. Las 12 posiciones que definen las propiedades de simetría del IPS, en un análisis en dos direcciones, a partir de un elemento de simetría

HEURÍSTICA DE LA VARIACIÓN PERIÓDICA DE LA DIVISIBILIDAD NUMÉRICA

La periodicidad de la variación de la divisibilidad numérica está relacionada con los múltiplos de 6 que definen a los IPS. En el gráfico de la figura 2 se ilustra la tendencia de esta cualidad a ser constante para valores numéricos superiores a 100 en el eje de las X, mientras que manifiesta fluctuaciones para los menores de 100.

Este comportamiento de variación de las propiedades para pequeños valores numéricos en el eje de las X ($n \leq 100$) y su estabilización para grandes escalas ($n \geq 100$), manifiesta una analogía de importancia heurística con las *variaciones de las propiedades físicoquímicas de las sustancias a escalas nanométricas*.

En el desarrollo de la nanotecnología y el estudio de porciones de sustancias formadas por conglomerados de pocos átomos, se observa que las propiedades físicoquímicas, varían significativamente con respecto a la cantidad de átomos tomados. Dichas propiedades van variando en la medida que aumenta el número de átomos de la muestra tomada, hasta que se estabilizan y no varían más, a partir de determinada cantidad de átomos (escala macromolecular). Así, por ejemplo, el punto de ebullición establecido en la *Tabla Periódica de los Elementos Químicos* para una sustancia dada, es diferente cuando se toma porciones nanométricas (de pocos átomos) de la misma [6]. La referida cualidad varía con el aumento de la cantidad de átomos de la porción, hasta que no sobrepase una masa o cantidad crítica, a partir de la cual se hace constante la propiedad, no dependiendo del aumento de la porción tomada.

De modo similar puede ocurrir con otras propiedades físicoquímicas de las sustancias [7]. Es decir, que a escalas nanométricas el comportamiento de las sustancias se torna diferente al tradicionalmente conocido, como si se estuviera en presencia de *nuevas sustancias*.

Las regularidades descritas son de gran valor para la nanotecnología. Sucede que las propiedades físicoquímicas tradicionalmente establecidas, corresponden al estudio de macroporciones de sustancias que sobrepasan los millones de átomos. De esta forma, en presencia de macroporciones de sustancia (grandes conglomeraciones de átomos), las propiedades físicoquímicas son invariables con respecto a la variación del tamaño de la porción tomada, siempre y cuando la misma sobrepase la cantidad crítica de elementos atómicos a partir de la cual sus características permanezcan constantes. De hecho, sería de gran utilidad realizar el estudio de tales variaciones para las sustancias más empleadas en la nanotecnología.

Esta regularidad es similar a la tendencia del comportamiento de los cuatro tipos de divisibilidad, los cuales dejan de ser constantes e invariables por debajo de cierta cantidad crítica, que en este caso es alrededor de 100 en el eje de las X (figura 2).

Los resultados obtenidos en el estudio de la variación periódica de la divisibilidad de los números naturales como fenómeno y sus patrones numéricos comunes con los poliedros platónicos, la *Tabla Periódica de los Elementos Químicos*, el *Sistema de Notas y Escala Musical Temperada* y el *Código Genético Universal*, pudieran ser un punto de partida para la investigación de otras cualidades cuantitativas comunes en los sistemas de altas restricciones.

Más aún, estos patrones numéricos comunes en los sistemas investigados sugieren también la posibilidad de que existan otras propiedades específicas, inherentes solo a cada sistema por separado, las cuales tengan su referente común en los sistemas restantes (figura 4).

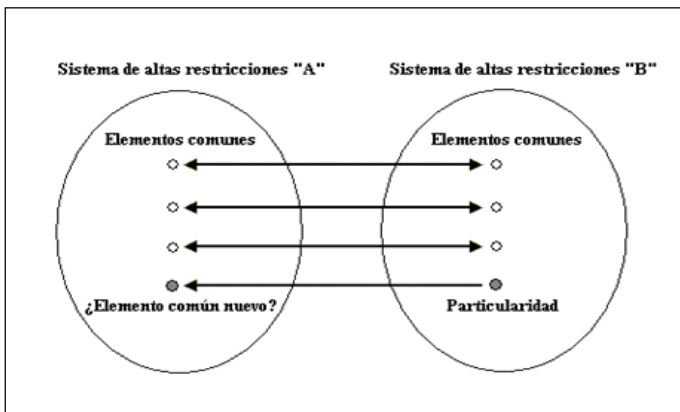


Fig. 4. Búsqueda heurística de otros elementos comunes

CONCLUSIONES

La investigación realizada permite afirmar que el *Conjunto de los Números Naturales*, como la *Tabla Periódica de los Elementos Químicos*, el *Sistema de Notas y Escala Musical Temperada* y el *Código Genético Universal* analizados en [1], tienen patrones matemáticos comunes por ser, sistemas de altas restricciones, esto es, sistemas portadores de cualidades discretas y regulares extremas de resolución extrema. Los poliedros platónicos constituyen el escenario geométrico por excelencia que permite estudiar (experimentar y modelar) estas características asociadas a las altas restricciones.

La existencia de un fenómeno de resolución de orden matemático común en estos sistemas de altas restricciones tan diferentes, explica la presencia de un grupo de patrones cuantitativos comunes, que son característicos a estos sistemas, a pesar de pertenecer a escenarios aislados y bien distantes unos de otros.

La investigación realizada permite formular de manera lógicamente argumentada un conjunto de principios o premisas epistemológicas de una *teoría poliédrica para la interpretación de la realidad de altas restricciones*.

Estos principios son:

Principio 1

La realidad de altas restricciones tiene una naturaleza o esencia poliédrica, susceptible de ser revelada mediante despliegues geométricos de los poliedros platónicos.

Principio 2

En los conocimientos que se tienen sobre los poliedros platónicos existe un contenido "implícito", "no revelado", "oculto" que expresa una regularidad o ley universal.

Principio 3

Las propiedades matemáticas de los poliedros platónicos son susceptibles de ser convertidas en un conjunto de procedimientos o despliegues heurísticos para revelar nuevas aristas y propiedades en otros ámbitos del saber acerca de las cosas.

Principio 4

Ese contenido se revela mediante despliegues geométricos para sistemas geométricos o no geométricos de altas restricciones.

Principio 5

Los despliegues heurísticos geométricos de los poliedros platónicos revelan regularidades cuantitativas y cualitativas, propiedades geométricas internas, difícilmente observables de forma directa, contenidas en los sistemas geométricos y no geométricos de altas restricciones, y enriquecen con ello el nivel teórico de esa región de análisis, siendo una potente herramienta para el descubrimiento de nuevos conocimientos en el sistema que se estudie. Tal es el caso de lo acontecido con el descubrimiento de las *Álgebras del Código Genético* como lo reconocen sus autores al señalar: "We want to express our gratitude to Carlos Alberto Canino Ramos by their suggestions and advine about the cubil representation of the genetic code" [8].

Las álgebras del *Código Genético* y las representaciones geométricas de su espacio algebraico [8], [9] han sido empleadas no solo en el análisis cuantitativo y cualitativo del código genético estándar, sino además, en la investigación de un supuesto código genético ancestral, a partir del cual se ha originado o evoluciona el código genético estándar (actual) [9]. En ambos casos, los códigos genéticos ancestral y estándar, son geoméricamente representados como cubos en el espacio tridimensional, solo que el código genético estándar resulta insertado en el código genético ancestral [10]. Estos estudios evidencian que, la necesidad biológica de minimizar los errores producidos en los procesos de transcripción y replicación del ADN, somete a la estructura del código genético a altas restricciones. Estas restricciones conducen al origen y evolución de un código genético organizado de una manera tal que los errores en los procesos biológicos mencionados son minimizados. En este caso se habla de la optimalidad del *Código Genético* [8], [9].

Semejantes restricciones son expresadas matemáticamente en la estructura del espacio vectorial tridimensional del *Código Genético*, la cual ha conducido al descubrimiento de que las relaciones cuantitativas observadas entre los codones que conforman el *Código Genético* están matemáticamente determinadas [9] [10]. Un sumario dirigido a lectores de formación general, conjuntamente con una demostración, se encuentran accesible en el Sitio Web del Wolfram Demonstration Project. [11]

¿Qué esencia dialéctica de la arquitectura de la realidad se expresa en estas insólitas regularidades o patrones numéricos comunes a los sistemas de altas restricciones?

Pareciera que en la base de la diversidad cualitativa del mundo descansan parámetros cuantitativos repetibles y estables, como si, en su fundamento, la esencia del universo fuera cuantitativa (unidad matemática del mundo). [12] Sin lugar a dudas, semejante constatación abriría un amplio campo de estudio para la ciencia.

REFERENCIAS

1. **CANINO RAMOS, C. E.; DÍAZ CABALLERO, J. R.; MOREJÓN VIZCAÍNO, G.** "Heurística de los poliedros platónicos para la investigación de la realidad de altas restricciones". *Revista Cubana de Ingeniería*. 2013, vol. IV, núm. 1, enero - marzo, pp. 59-77.
2. **DÍAZ CABALLERO, J. R.** *Más allá del paradigma. Filosofía y creatividad*. La Habana: Editorial de Ciencias Sociales. 2012, pp. 15. ISBN 978-959-06-1386-9.
3. **CASTRO, E.** *Configuraciones puntuales. Sistema de representación idóneo para las sucesiones de números naturales*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España. Disponible en Web: [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Castro\(CIBEM\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Castro(CIBEM).pdf) [consultado en línea: febrero 2012].
4. **CASTRO, E.** *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Ed. Comares, 1995.
5. **CORBALÁN, F.** *La Matemática aplicada a la vida cotidiana*, Barcelona: Ed. Graó, 1997, p. 72.
6. **BUFFAT, Ph.; BURREL, J. P.** "Size Effect on the Melting Temperature of Gold Particles". *Physical Review A*13 (6), 1996, p. 2287.
7. **BUZEA, C.; PACHECO, I.; ROBBIE, K.** "Nanomaterials and Nanoparticles: Sources and Toxicity". *Biointerphases*, 2007, 2 (4), pp. 17-71.
8. **SÁNCHEZ, Roberly; GRAU, Ricardo; MORGADO, E.** "A Novel Lie Algebra of the Genetic Code over the Galois Field of Four DNA Bases". *Mathematical Biosciences* 202. 2006, pp.172, 156-174.
9. **SÁNCHEZ, Roberly; GRAU, Ricardo** "An Algebraic Hypothesis about the Primeval Genetic Code Architecture". *Mathematical Biosciences* 221, 2009, pp. 60-76.
10. **FREELAND, S. J.; HURST, L. D.** "The Genetic Code is One in a Million", *JMolE*, 1998, vol. 47, núm. 3, pp.238-48.
11. **SÁNCHEZ, Roberly; GRAU, Ricardo**, "The Ancestral Genetic Code Cube". *Wolfram Demonstration Project*.URL, 2009.Disponible en Web: <http://demonstrations.wolfram.com/TheAncestralGeneticCodeCube> [consultado en línea: febrero 2012]
12. **DÍAZ CABALLERO, J. R.; CANINO RAMOS, C. E.** "Heurística de los poliedros regulares para la investigación", *Revista Cubana de Ingeniería*, mayo-agosto, 2012, vol. III, núm. 2, pp. 59 - 69.

AUTORES

Carlos Alberto Canino Ramos

Ingeniero Electrónico, Máster en Ciencias Técnicas de Electrónica de la Aviación, Instituto en Ciencia y Tecnología de los Materiales, Universidad de La Habana, Cuba

José Ricardo Díaz Caballero

Licenciado en Filosofía, Doctor en Ciencias Filosóficas, Profesor Titular, Dirección de Ciencias Sociales, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, La Habana, Cuba

Genovevo Morejón Vizcaíno

Ingeniero Mecánico, Doctor en Ciencias Técnicas, Profesor Titular, Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería Mecánica, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, La Habana, Cuba.

Polyhedral Heuristics of Periodical Qualities in the Numerical Divisibility Variation

Abstract

The present work demonstrate how this polyhedral heuristic is also revealed in the Set of Natural Numbers, where it is manifested numerical regularities similar to he platonic polyhedra developments which open a wide field for the study of new numerical regularities as those associated to the periodicity variation of its divisibility..

Key words: heuristics, platonic polyhedra, geometry, harmony, symmetry, common patterns, high restrictions