

# Heurística de los poliedros platónicos para la investigación de la realidad de altas restricciones

**Carlos Alberto Canino Ramos**

Correo electrónico: canino@imre.oc.uh.cu

Instituto en Ciencia y Tecnología de los Materiales, Universidad de La Habana, Cuba

**Artículo original**

**José Ricardo Díaz Caballero**

Correo electrónico: joser@gest.cujae.edu.cu

**Genovevo Morejón Vizcaino**

Correo electrónico: gmvizcaino@mecanica.cujae.edu.cu

Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, La Habana, Cuba

## Resumen

En el presente trabajo se exponen conceptos, principios y procedimientos que conforman una teoría para la interpretación geométrica heurística de la realidad de altas restricciones; se fundamenta la tesis de que los poliedros platónicos son portadores de un contenido con un elevado potencial heurístico para la interpretación teórica de la realidad, en particular de los sistemas de altas restricciones, ejemplo de los cuales son la Tabla Periódica de los Elementos Químicos, el Sistema de Notas y Escala Musical Temperada y el Código Genético Universal.

Palabras clave: heurística, poliedros platónicos, geometría, armonía, simetría, patrones comunes, altas restricciones.

Recibido: 24 de septiembre del 2012

Aprobado: 6 de diciembre del 2012

## INTRODUCCIÓN

Estudios anteriores, publicados por los autores [1] y otros especialistas, [2- 4] refieren el elevado potencial heurístico de los poliedros platónicos y la importancia que tienen para la búsqueda creativa en el arte, la ciencia y la técnica, en calidad de portadores de múltiples propiedades y atributos útiles para la interpretación y representación de la realidad. Dando continuidad a estos estudios, el presente trabajo tiene como objetivo fundamentar la tesis de que los poliedros platónicos y sus despliegues centrados, constituyen también una poderosa herramienta heurística [5] para revelar nuevas regularidades, ángulos de análisis y propiedades en *escenarios de altas restricciones*, esto es, sistemas portadores de cualidades *discretas y regulares* extremas de resolución extrema.

La investigación realizada no solo responde afirmativamente la pregunta científica planteada de si *la heurística de los poliedros platónicos* es también aplicable a *sistemas de altas restricciones*, sino que demuestra que estos poliedros constituyen el escenario geométrico por excelencia para estudiar patrones matemáticos comunes en sistemas de altas restricciones (incluso no geométricos) y tan distantes unos de otros, como la *Tabla Periódica de los Elementos Químicos*, el *Sistema de Notas y Escala Musical Temperada* y el *Código Genético Universal*.

Los resultados obtenidos allanan el camino para la investigación de otros sistemas análogos con el propósito de revelar el nivel de generalidad que tienen estos patrones matemáticos de los poliedros regulares y sus despliegues,

siendo una potente herramienta para el descubrimiento de nuevos conocimientos en el sistema que se estudie.

## METODOLOGÍA PARA EL DESPLIEGUE CENTRADO DE LOS POLIEDROS PLATÓNICOS Y SUS PATRONES NUMÉRICOS

Todo cuerpo puede, en principio, ser representado como combinación de los poliedros platónicos o mediante transformaciones a partir de los mismos, de forma similar a como, cualquier figura en la pantalla de un ordenador puede ser expresada por sus píxeles. Los poliedros platónicos constituyen las cinco formas más elementales en que puede expresarse un sólido, cuando se aplica la máxima restricción al proceso de construcción. [6] Estas restricciones son:

- Todas sus caras son polígonos regulares iguales, lo que implica también que todas sus aristas y todos los ángulos de sus caras sean iguales.
- Todos sus vértices son de igual orden (concurren igual número de caras y de aristas).
- Todos sus vértices son convexos.
- Todos sus ángulos diedros (que forman las caras entre sí) son iguales.

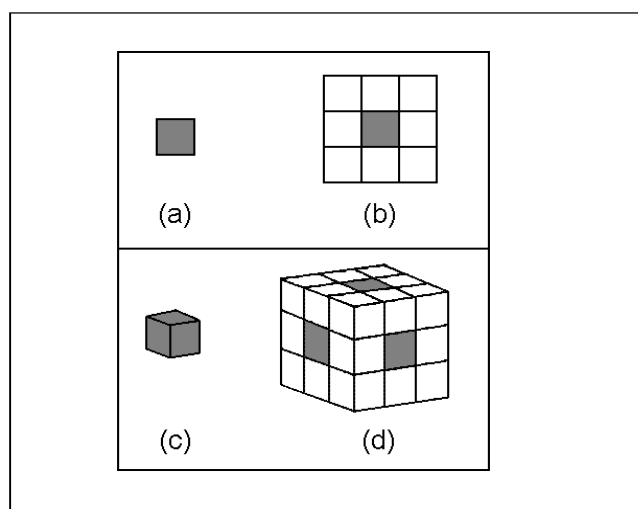
De aquí se puede concluir que los cinco poliedros regulares constituyen el fenómeno de más altas restricciones de la expresión de un sólido en el espacio. Entendiendo por *altas restricciones aquellas condiciones extremas propias de un objeto, fenómeno o sistema, asociadas a las regularidades discretas más elementales que definen su resolución, al máximo de restricción permisible*.

Los sabios de la antigüedad al establecer las conexiones de los poliedros, la música y los números enteros, con la armonía del universo, estaban haciendo las primeras asociaciones de altas restricciones. [7] El estudio de las notas en una cuerda vibrante es la observación de un fenómeno armónico de altas restricciones, dado por las limitaciones de la cuerda en sus dos extremos. Esto genera modos de vibración en los cuales, las relaciones de frecuencias de sus armónicos están dadas por la serie armónica de valores enteros  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Los intervalos musicales también son expresados en números enteros.

El conjunto de los números naturales en sí mismo es un escenario de altas restricciones expresado en el incremento de una magnitud única (el número 1).

En el desarrollo de las ideas presentes en este artículo, los poliedros platónicos son tomados como elementos para realizar *despliegues centrados*, con el objetivo de comprobar que un escenario geométrico pueda ser utilizado heurísticamente para estudiar características numéricas de *sistemas de altas restricciones*, es decir, de sistemas de patrones discretos y más elementales que definen la resolución de determinados universos, como por ejemplo, la *Tabla Periódica de los Elementos Químicos*, el *Sistema de Notas y Escala Musical Temperada* y el *Código Genético Universal*.

El *despliegue centrado* es un procedimiento que comienza en el plano (espacio dimensional, 2D) y consiste en añadir al patrón a experimentar (figura 1a), más elementos (en correspondencia al patrón inicial) en todo su perímetro según sea posible, hasta completar una segunda capa (figura 1b). Luego, la retícula plana obtenida se extiende en el espacio tridimensional (3D) lo más regular posible, en correspondencia con el poliedro objeto de estudio como se observa en la figura 1c) (en el ejemplo del despliegue centrado del cubo de la figura 1c), resulta una retícula cúbica, como en la figura 1d).



**Fig. 1. a) Celda cuadrada a desplegar; b) Celda cuadrada desplegada de forma centrada; c) Cubo a desplegar; d) Extensión en el espacio de la celda cuadrada desplegada b), que genera al cubo desplegado.**

Esta extensión *poliédrica* de la retícula plana, puede ser de dos tipos:

- Retícula poliédrica formada por un conjunto de celdas que llenan un espacio dado.
- Desarrollo topológico formado por una superficie reticulada que se encierra en sí misma, en un cuerpo vacío.

El *patrón a experimentar* es el elemento o grupo de elementos a partir del cual se va a establecer la estrategia del despliegue según las particularidades del poliedro en cuestión.

Existen tres variantes de realizar el *despliegue centrado* según el *patrón a experimentar*.

- Despliegue centrado en las caras. El patrón a experimentar es el polígono que caracteriza a las caras del poliedro.
- Despliegue centrado basado en una celda transversal al cuerpo. En este caso el patrón de experimentación es el polígono que caracteriza a las celdas poligonales transversales al cuerpo del poliedro, definidas por sus propias aristas.
- Despliegue centrado basado en el *arreglo raíz*. Aquí el patrón a experimentar es el arreglo raíz (o los arreglos raíces) que caracteriza al poliedro.

**Arreglo raíz** de un poliedro regular es el arreglo característico de las dos retículas regulares planas y duales\* mediante el cual se derivan los poliedros regulares (en sus dos grupos duales\*\* por reducciones sucesivas de los propios arreglos (figura 2 y tabla 1):

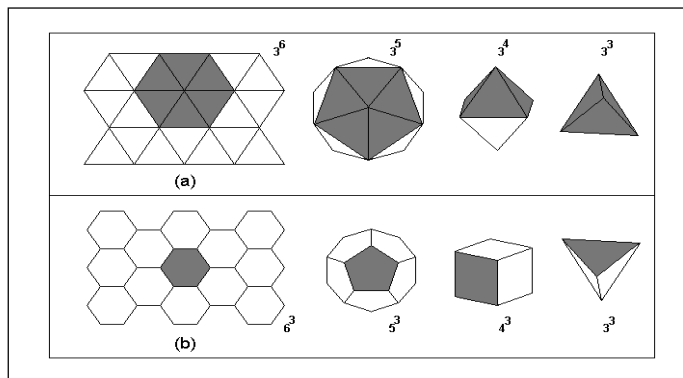
- **Arreglo hexagonal triangulado**, dado por el orden 6 en el cual concurren las celdas triangulares en los vértices o nodos de la retícula triangular regular plana (figura 2a).

- **Arreglo hexagonal simple**, dado por los 6 lados de las celdas hexagonales que caracterizan a la retícula hexagonal regular plana (figura 2b).

En la figura 2 y la tabla 1, de izquierda a derecha, se observan las dos derivaciones poliédricas duales, a partir de las dos retículas regulares duales correspondientes:

- A partir de una retícula triangular regular, en una reducción sucesiva de orden 6 de sus vértices a orden 5, orden 4 y orden 3 (figura 2a).

- A partir de una retícula hexagonal regular, en una reducción sucesiva de sus celdas hexagonales de 6 lados a 5 lados (pentágono), 4 lados (cuadrado) y 3 lados (triángulo) (figura 2b).



**Fig. 2. Derivación de los poliedros regulares (en sus dos grupos duales) por reducciones sucesivas de su arreglo raíz: a) A partir del arreglo raíz hexagonal triangulado; b) A partir del arreglo raíz hexagonal simple.**

En la figura 2 y la tabla 1, se puede constatar cómo al arreglo raíz hexagonal triangulado le corresponde el icosaedro y el octaedro; mientras que al arreglo raíz hexagonal simple le corresponde el dodecaedro y el cubo. En el caso del tetraedro, al ser autodual, le corresponden los dos arreglos raíces.

En dependencia del tipo de poliedro, será posible realizar las tres variantes de despliegues, o dos, o tan solo una. Posteriormente, se seleccionan aquellos despliegues que tienen patrones numéricos comunes. En la selección de dichos patrones comunes no solo se examina el despliegue de forma pasiva, sino también, otras cualidades de transformación específicas comunes, como por ejemplo, transformaciones toroidales.

Las transformaciones se realizan de forma *discreta*, sobre la base de la *resolución* que definan las celdas en sí mismas. Es decir, no se lleva a cabo un corte o truncamiento menor o mayor que las dimensiones definidas por las celdas.

En la tabla 2 se muestran los patrones numéricos comunes que se cumplen en los despliegues escogidos.

En esta tabla 2 el patrón numérico de la serie 1, 3, 5 y 7 se refiere a los incrementos cuadráticos correspondientes a la serie de los números cuadrados 1, 4, 9, y 16:

Unidad inicial 1:  $1=1^2$

Incremento en 3:  $1+3=4=2^2$

Incremento en 5:  $1+3+5=9=3^2$

Incremento en 7:  $1+3+5+7=16=4^2$

Los cinco poliedros regulares constituyen un hecho científico, es decir, ellos son la diversidad en que se puede conformar de manera regular un poliedro. Más adelante se explica cómo estos patrones numéricos de 3; 12; 20; 60; 64 y los incrementos cuadráticos 1, 3, 5, 7; se cumplen también en otros sistemas de altas restricciones. Para la interpretación de los datos experimentales, es necesario entender que no todos estos patrones tienen que cumplirse de la misma manera en cada uno de los despliegues de los cinco poliedros regulares. El análisis de cada poliedro describe la diversidad del fenómeno. Sin embargo, lo importante aquí es constatar que la totalidad se cumple en los poliedros en cuestión.

Tabla 1 División en dos formas duales de los poliedros regulares, a partir de su arreglo raíz				
Reducciones sucesivas en arreglos del número de orden por vértice	Retícula triangular regular	Icosaedro	Octaedro	Tetraedro
	Orden 6	Orden 5	Orden 4	Orden 3
	Genera poliedros de caras triangulares {3,q}	{3,5}	{3,4}	{3,3}
	Retícula hexagonal regular	Dodecaedro	Cubo	Tetraedro
	6 lados	5 Lados	4 Lados	3 Lados
	Genera poliedros de orden 3 {p,3}	{5,3}	{4,3}	{3,3}

\* Retículas duales son aquellas en las que los centros de las celdas de una, dan lugar a los vértices de la otra y viceversa.

\*\*Poliedros duales son aquellos en los que los centros de las caras de uno, dan lugar a los vértices del otro y viceversa.

Tabla 2

Cumplimiento de los patrones numéricos comunes a los poliedros desplegados seleccionados. Los patrones subrayados no se cumplen directamente en los despliegues, sino en transformaciones posteriores, o se aproximan al cumplimiento

Patrón numérico	Cubo (despliegue en las caras)	Tetraedro (despliegue en las caras)	Icosaedro y dodecaedro (despliegue del arreglo raíz)	Octaedro (despliegue en las celdas transversales)
64	Se cumple	Se cumple	No se cumple	Se cumple parcialmente
60	Se cumple	Se cumple	Se cumple	Se cumple parcialmente
20	Se cumple	Se cumple	Se cumple	Se cumple parcialmente
12	Se cumple	Se cumple	Se cumple	Se cumple
1, 3, 5 y 7	Se cumple	Se cumple	Se cumple parcialmente	Se cumple
3	Se cumple	Se cumple	Se cumple	Se cumple

### Despliegues centrados de los poliedros regulares

#### Caso particular del despliegue centrado del cubo

Se empieza por el cubo, porque puede ser desplegado de una forma más sencilla en una estructura reticular, dado que es el único poliedro regular que llena el espacio en sí mismo (figura 3b).

El cubo tiene sus caras cuadradas y puede desplegarse solo en dos variantes: en las caras y en el arreglo raíz (figura 3). No es posible realizar la variante de celdas transversales al cuerpo ya que las aristas del cubo no la definen. De las dos variantes referidas, el despliegue centrado a sus caras cuadradas es el que porta patrones comunes a los despliegues de los restantes poliedros platónicos (tabla 2).

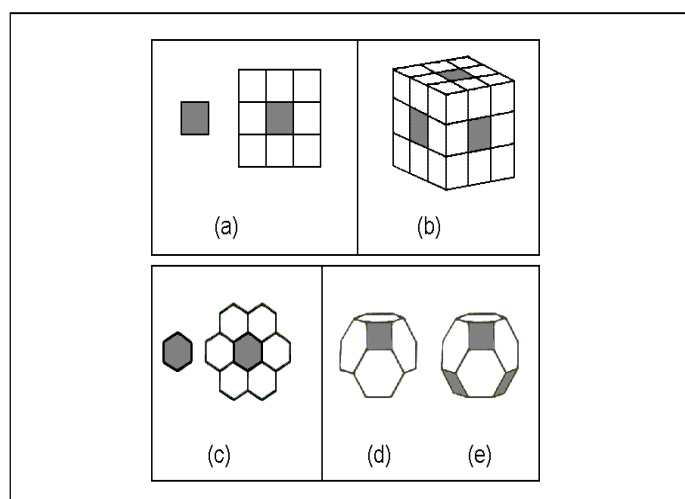


Fig. 3. Despliegues centrados del cubo: a) Despliegue centrado de una celda cuadrada en el plano; b) Extensión poliédrica del despliegue centrado en las caras; c) Despliegue centrado del arreglo raíz del cubo; d) Reducción de la celda central de hexagonal a cuadrada; e) Extensión poliédrica del despliegue centrado de arreglo raíz.

Para el despliegue centrado en las caras, se realiza un crecimiento centrado a partir de una celda cuadrada en 2D, añadiendo a esta celda inicial otras en todo su perímetro según sea posible (figura 3a). De esta manera se obtiene una retícula regular cuadrada centrada, en dos capas, que posteriormente se extiende de forma regular cúbica en el espacio para definir su expresión reticular cúbica (figura 3b).

En el caso del despliegue centrado basado en el arreglo raíz (figura 3c) muestra cómo a partir del arreglo raíz hexagonal simple (figura 2b, tabla 1), se realiza un crecimiento centrado en 2D. Obsérvese cómo al patrón inicial de la celda hexagonal, se le añaden celdas en todo su perímetro según sea posible, hasta ser desplegado en dos capas. Una vez realizado el despliegue se procede a reducir la celda central, de hexagonal a cuadrada (en correspondencia con el patrón cuadrado de las caras del cubo) (figura 3d). Luego, este patrón se va extendiendo hasta cerrar la superficie en el espacio, lo más regular posible. El poliedro obtenido se conoce con el nombre de *octaedro truncado* y pertenece a la familia de los *sólidos arquimedianos*. El octaedro truncado se puede obtener a partir del cubo, aplicando el método de rotación-traslación de las caras y las aristas descrito por Williams Robert en *The Geometrical Foundation of Natural Structure, A Source Book of Design*. [8]

De estas dos experimentaciones con el cubo, el despliegue centrado en las caras (figura 3b) es el que satisface los patrones comunes de la tabla 2, por tanto, es el seleccionado (figura 4).

### Patrones comunes en el despliegue del cubo

#### El patrón de 64

Se caracteriza por ser una retícula cúbica de 4 nodos por aristas que definen a  $4^3 = 64$  nodos en total (figura 4a). También es una retícula cúbica con los elementos mínimos

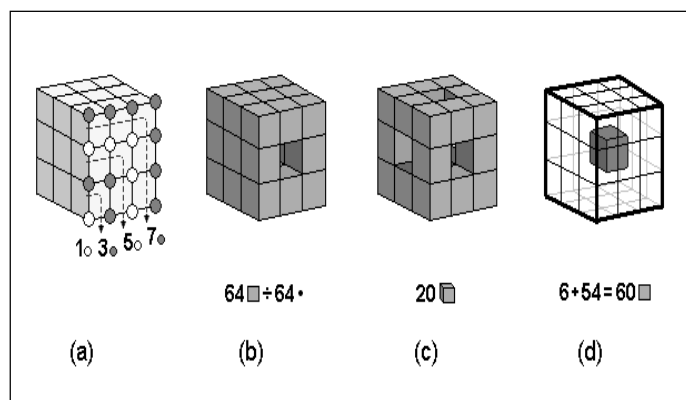
y suficientes para construir un toroide cúbico, en el cual el número de 64 nodos es igual al número de las 64 celdas cuadradas de su superficie (figura 4b).

#### El patrón 1, 3, 5, 7 de incremento centrado

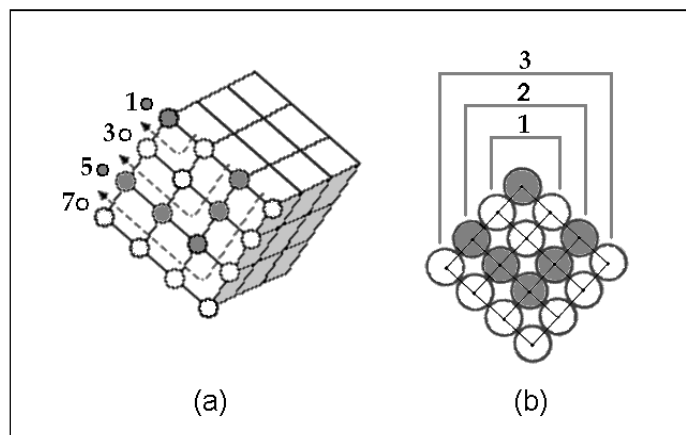
Se caracteriza por los incrementos cuadráticos 1, 3, 5, 7, de los nodos de las caras de la retícula cúbica, a partir de un vértice (figura 4a) y figura 5).

#### El patrón de 20

Esta retícula de 27 celdas cúbicas se define con solo 20 celdas (distribuidas según la figura 4c), que completan todas sus aristas. Las 20 celdas cúbicas son, 12 celdas centradas en las aristas, más las 8 celdas angulares. Las restantes 7 celdas complementan los espacios intersticiales de estas 20 (las 6 celdas centradas en las caras, más la celda centrada al cuerpo) (figura 4c).



**Fig. 4. Retícula cúbica resultante del despliegue centrado en las caras del cubo:** a) Incrementos cuadráticos 1, 3, 5, 7, en los nodos de las caras; b) Toroide cúbico de 64 celdas cuadradas (?) en la retícula cúbica de  $64 = 4 \times 4 \times 4$  nodos (o); c) 20 celdas cúbicas mínimas y suficientes para definir esta retícula; d) Dos capas topológicas centradas que se definen, una centrada al cuerpo de 6 celdas cuadradas y una externa de 54 celdas, para un total de 60 celdas cuadradas (?).



**Fig. 5. Incremento centrado de los nodos a partir de un vértice en las caras de la retícula cúbica.** Los nodos de la retícula han sido ampliados a círculos (?) para contrastar el patrón de incremento: a) Incremento cuadrático de nodos 1, 3, 5, 7; b) Incremento en 3 parejas de nodos centradas al vértice.

#### El patrón de 60

En un análisis de las capas o superficies centradas, que se cierran en sí mismas (análisis topológico), se tienen la capa interior de la celda cúbica centrada al cuerpo de la retícula y la capa externa de la retícula cúbica. La superficie interior cuenta con 6 celdas cuadradas y la exterior con 54, para un total de 60 celdas cuadradas en capas centradas (figura 4d).

#### El patrón de 3

Este patrón es el que caracteriza no solo a los arreglos de vértices de orden 3 del cubo y sus despliegues, sino también al incremento de las caras en 3 parejas de nodos centrados a un vértice, como elemento unidad (1), que define a los grupos en valores de 3, 5 y 7 (figura 5b).

#### El patrón de 12

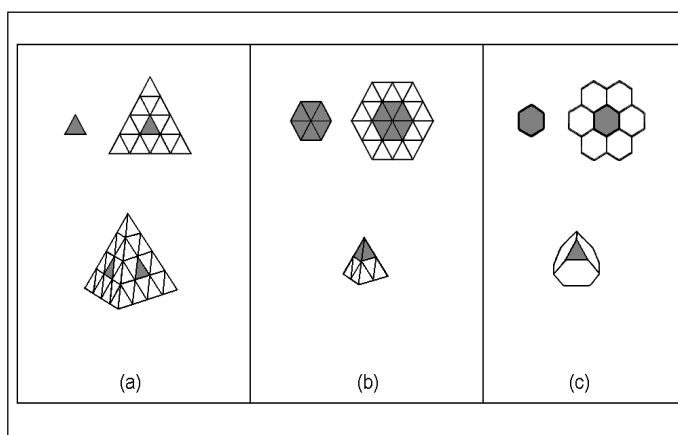
El cubo tiene 12 aristas, al igual que la retícula cúbica producto de su despliegue centrado en las caras, conservando la forma cúbica original.

#### Caso particular del despliegue centrado en el tetraedro

En un desarrollo reticular en el espacio, las celdas tetraédricas se complementan con celdas octaédricas y viceversa; es decir, que un arreglo reticular tetraédrico define espacios intersticiales de arreglos octaédricos y lo contrario.

El tetraedro tiene sus caras triangulares y puede desplegarse a través de dos variantes: en las caras y en el arreglo raíz (figura 6). Como el tetraedro es autodual permite su despliegue mediante los dos arreglos raíz posibles: el hexagonal triangulado (figura 6b) y el hexagonal simple (figura 6c).

Las aristas del tetraedro no definen celdas transversales al cuerpo, por lo cual no se puede acometer la variante de despliegue por celdas transversales. En el tetraedro, al igual que en el cubo, la variante centrada en las caras, es la que produce patrones comunes con los despliegues de los poliedros restantes (tabla 2).



**Fig. 6. Despliegues centrados del tetraedro:** a) Despliegue centrado en las caras; b) Despliegue centrado a su arreglo raíz hexagonal triangulado; c) Despliegue centrado a su arreglo raíz hexagonal.

Para el despliegue centrado en las caras, se realiza un crecimiento a partir de una celda triangular en 2D, añadiendo a esta celda inicial otras en todo su perímetro según sea posible, hasta alcanzar una segunda elongación triangular (figura 6a). Esta retícula plana se extiende de forma regular tetraédrica para obtener su expresión reticular tetraédrica en el espacio 3D (figura 6a).

El despliegue centrado a partir del arreglo raíz hexagonal triangulado (figura 2a), tabla 1) se puede observar en la figura 6b). Al arreglo raíz del hexágono triangulado se le hace un crecimiento centrado en 2D, añadiéndole celdas triangulares en todo su perímetro según sea posible. Una vez desplegado en 2 capas, se reduce de orden 6 a orden 3, en correspondencia con el patrón de orden 3 de los vértices del tetraedro, para cerrarse en una retícula tetraédrica en el espacio 3D.

Para el despliegue centrado a partir del arreglo raíz hexagonal simple (figura 2b), tabla 1), la figura 6c) muestra cómo a la celda hexagonal inicial, se le realiza un crecimiento centrado en 2D. Una vez desplegado en 2 capas, se reduce el arreglo hexagonal central a triangular, en correspondencia con el patrón triangular de las caras del tetraedro, para cerrarse en el espacio 3D. Se repite semejante patrón hasta completar un poliedro lo más regular posible. El poliedro obtenido se conoce con el nombre de *tetraedro truncado* y pertenece a la familia de los *sólidos arquimedianos*.

De estas 3 experimentaciones, el despliegue centrado en las caras (figura 6a) y figura 7a) es el que satisface patrones comunes a los despliegues de los poliedros platónicos restantes (tabla 2).

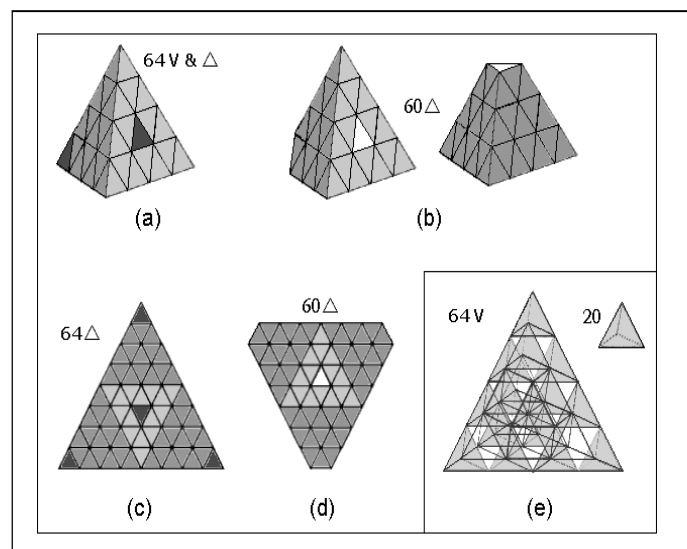


Fig. 7. Patrones del despliegue centrado en las caras del tetraedro: a) Celdas oscuras para eliminar y construir un "toroide"; b) "Toroide tetraédrico" mostrado en dos orientaciones; c) Superficie abierta de la retícula tetraédrica con las celdas oscuras; d) Superficie abierta del "toroide tetraédrico"; e) 20 celdas tetragonales suficientes para definir la retícula tetraédrica. V: Unidad de volumen. Δ: Unidad de superficie.

## Patrones comunes en el despliegue del tetraedro El patrón de 64

En esta retícula tetraédrica regular, el número de 64 celdas triangulares en su superficie es igual al número de las 64 unidades de volumen medidas en unidades de sus celdas tetraédricas (figura 7a) y e). La retícula tetraédrica se estructura en su interior por 24 celdas tetraédricas y 10 celdas octaédricas. Cada celda octaédrica contiene 4 veces el volumen de una celda tetraédrica, por tanto,  $(10 \times 4) + 24 = 64$ . Además, tiene 16 celdas triangulares en cada una de sus 4 caras, lo que también resulta  $64 = 16 \times 4$ .

### El patrón 1, 3, 5, 7 de incremento centrado

Esta serie se define en los 4 pasos de incrementos centrados de las celdas triangulares en las caras, a partir de un vértice hasta su base (figura 8). En la figura 8 se ilustran una de las caras de esta retícula tetraédrica y sus correspondientes incrementos 1, 3, 5, 7.

### El patrón de 20

La retícula tetraédrica está formada en su estructura interior por 24 celdas tetraédricas y 10 celdas octaédricas. De las 24 celdas tetraédricas, 20 están orientadas con la retícula externa, las otras 4 están invertidas. Las 20 celdas tetraédricas orientadas con la retícula exterior, son suficientes para construir la retícula, pues las restantes celdas (10 octaédricas y 4 tetraédricas invertidas) complementan los espacios intersticiales (figura 7e).

### El patrón de 60

La retícula tetraédrica desplegada es la que cumple con la condición mínima y suficiente para la construcción de un toroide tetraédrico. Dado que el tetraedro no llena el espacio en forma reticular como el cubo (sino que se complementa con octaedros), se tiene en cuenta a la retícula tetraédrica como una superficie cerrada vacía en su interior (análisis topológico) (figura. 7a), b), c) y d). Para construir el toroide se penetra eliminando una celda triangular centrada en las caras, y se sale, truncando al arreglo triangular de su vértice opuesto correspondiente (eliminando las tres celdas triangulares que conforman el vértice).

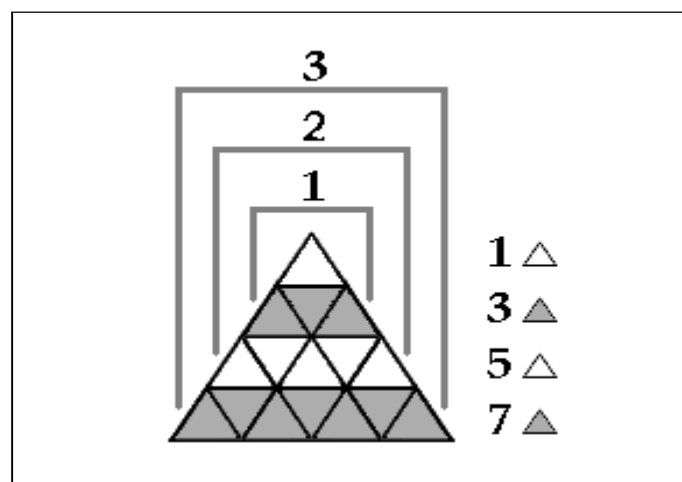


Fig. 8. Incremento en 3 parejas centradas de triángulos, a partir de un vértice, en las caras del tetraedro desplegado, que define al incremento cuadrático 1, 3, 5, 7.

Esta transformación es posible, ya que el arreglo triangular del vértice truncado, queda en fase con la celda centrada en la cara. En la figura 7c) se muestra la superficie topológica de la red tetraédrica abierta y con el color más oscuro, se destacan las 4 unidades triangulares: la central y las otras tres extremas que corresponden al vértice superior. De las 64 unidades triangulares de superficie se eliminan estas 4 para definir el toroide con las restantes 60 unidades triangulares.

### El patrón de 3

Este patrón es el que caracteriza a los arreglos en 3 de las celdas triangulares que se definen en las caras y en los vértices de orden 3 del tetraedro y sus despliegues. También en el incremento de las caras en 3 parejas centradas de triángulos, a partir de un vértice, que define al triángulo elemento unidad (1) y los grupos en valores de 3, 5 y 7 (figura 8).

### El patrón de 12

Se cumple en la cualidad que tiene el tetraedro de poder realizar 12 rotaciones\* distintas *manteniéndolo fijo*, siendo también una cualidad de su despliegue centrado en las caras, que conserva la forma tetraédrica original.

### Caso particular del despliegue centrado en el icosaedro y su dual el dodecaedro

El icosaedro y su dual, el dodecaedro, no forman retículas que puedan llenar el espacio, sino que solo definen despliegues de superficies topológicas cerradas (vacías en su interior).

Las celdas de las caras pentagonales del dodecaedro, no pueden llenar el plano en forma de retícula y desplegarse en el plano: el valor de sus ángulos no divide de forma entera a 360°. Como el dodecaedro tampoco tiene celdas que se definan transversalmente, la única posibilidad que queda de despliegue centrado es la del arreglo raíz (figura 9). El despliegue del arreglo raíz del dodecaedro cumple con los patrones comunes a los despliegues de los poliedros platónicos restantes (tabla 2).

A partir del *arreglo raíz hexagonal simple* del dodecaedro (figura 2b) y tabla 1), se realiza un crecimiento centrado en 2D (figura 9a) que consiste en que al arreglo inicial del hexágono se le añaden celdas en todo su perímetro según sea posible. Para obtener la extensión poliédrica de este patrón desplegado en el espacio 3D, la celda central hexagonal se reduce a pentagonal, en correspondencia con el patrón pentagonal de las caras del dodecaedro (figura 9a). Posteriormente, se va extendiendo semejante patrón, hasta cerrar la superficie en el espacio, lo más regular posible.

El poliedro resultante es conocido por el nombre de *icosaedro truncado*, perteneciente a la familia de los *sólidos arquimedianos* (figura 9a).

Como su nombre indica, se puede obtener también truncando a un icosaedro hasta la mitad de sus aristas (figura 10 a). El icosaedro truncado tiene 12 caras pentagonales distribuidas según las caras del dodecaedro y 20 caras hexagonales distribuidas según las caras del icosaedro.

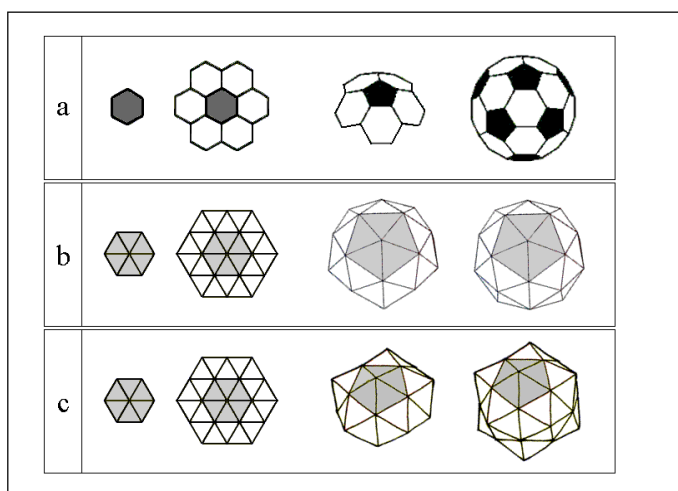


Fig. 9. a) Despliegue centrado del arreglo raíz del dodecaedro; b) despliegue centrado del arreglo raíz del Icosaedro en estrategia dual; c) despliegue centrado del arreglo raíz del Icosaedro en estrategia topológica dual.

Este poliedro es el que tradicionalmente se ha usado como patrón en el diseño del balón de fútbol, posteriormente denominado *buckyball* (*bukyball*) o fullereno en honor al arquitecto Richard Buckminster Fuller. [9]

Para lograr un despliegue en el icosaedro con patrones comunes al dodecaedro desplegado, se emplearon dos estrategias una dual (figura 9b) y otra topológica dual\*\* (figura 9 c) al despliegue de arreglo raíz realizado en el dodecaedro, a partir del arreglo raíz hexagonal triangulado del icosaedro (figura 2a) y tabla 1).

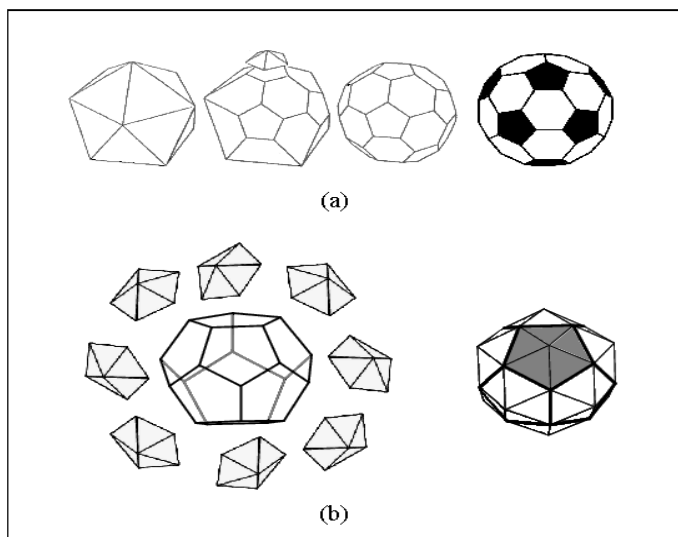


Fig. 10. Transformaciones opuestas en los despliegues del icosaedro y el dodecaedro: a) obtención del dodecaedro desplegado truncando a un icosaedro; b) Obtención del icosaedro desplegado aumentando a un dodecaedro en todas sus caras.

\* Según la teoría de grupos finitos del álgebra abstracta, el tetraedro define al grupo (poliédrico rotacional)  $G_4$  que tiene 12 rotaciones distintas *manteniéndolo fijo*, esto es, que después de rotarlo, vuelve a adoptar una orientación equivalente (en el sentido simétrico) a la original.

\*\* Es posible distorsionar un poliedro dual de modo tal que ya no se pueda obtener por reciprocidad del original en ninguna esfera. En este caso se dice que los dos poliedros son aún topológicamente duales.



Como *estrategias dual y topológica dual* se denomina a las transformaciones en 3D, que se le hacen a un patrón dado (en este caso al despliegue en 2D del arreglo raíz hexagonal triangulado del icosaedro) y que se repiten en correspondencia dual (o topológica dual) en otro (en este caso al despliegue en 2D del arreglo raíz hexagonal simple del dodecaedro). La transformación paso a paso que se realiza en uno, se extrapola (de forma paralela) al otro en correspondencia dual (o topológica dual).

El icosaedro desplegado por la estrategia dual se conoce con el nombre de *pentaquisdodecaedro* (figura 9 b). Con la estrategia dual se conserva que el poliedro desplegado sea convexo como su original el icosaedro, sin embargo, las caras de triángulos equiláteros del icosaedro original son transformadas a triángulos isósceles.

El icosaedro desplegado por la estrategia topológica dual es un *deltaedro* de 60 caras (figura 9 c). Con la estrategia topológica dual se conservan los triángulos equiláteros, como en su poliedro original el icosaedro, pero se pierde la convexidad original del icosaedro, obteniéndose un poliedro cóncavo.

Las dos estrategias, dual y topológica dual, generan en la práctica despliegues centrados del icosaedro en correspondencia dual y topológica dual de sus vértices (V) y sus caras (C), con el dodecaedro desplegado (tabla 3).

Tabla 3 Correspondencia dual y topológica dual entre el dodecaedro desplegado y el icosaedro desplegado			
Dodecaedro desplegado icosaedro truncado (balón de fútbol o buky)		Icosaedro desplegado. Dodecaedro aumentado en todas sus caras (deltaedro de 60 caras y pentaquisdodecaedro)	
# Caras (lados)	# Vértices (orden)	# Vértices (orden)	# Caras (lados)
$12 C_5 + 20 C_6$	$60 V_3$	$12 V_5 + 20 V_6$	$60 C_3$

Nota: Para referirse a la cantidad de caras (C) o vértices (V) se ha utilizado el símbolo numérico # delante de las letras C y V respectivamente. Para indicar el orden de los vértices o el número de lados de las caras, se ha situado un subíndice en la parte derecha inferior de las letras C y V respectivamente

Los poliedros semirregulares obtenidos por la estrategia dual y la topológica dual, están formados por 12 vértices de orden 5 que conservan el patrón de distribución de las caras del dodecaedro, los cuales se complementan con 20 vértices de orden 6 distribuidos en el patrón de las caras del icosaedro (figura 9 b) y c).

Estos despliegues del icosaedro, mediante la estrategia dual y la topológica dual, pueden ser obtenidos también por el aumento de las 12 caras del dodecaedro con pirámides pentagonales (figura 10 b). Según los triángulos de estas pirámides pentagonales se obtiene uno (el de la estrategia dual) u otro (de la estrategia topológica dual):

- Con pirámides pentagonales de triángulos isósceles se obtiene el pentaquisdodecaedro (figura 9 b).
- Con pirámides pentagonales de triángulos equiláteros se obtiene un deltaedro de 60 caras (figura 9 c).

También existe una correspondencia diametralmente opuesta si se analiza que el dodecaedro desplegado se puede obtener truncando a un icosaedro (figura 10 a), mientras que el icosaedro desplegado, aumentado a un dodecaedro en todas sus caras (figura 10 b).

### Otros despliegues posibles en el icosaedro

El icosaedro, por tener sus caras triangulares como el tetraedro, puede desplegarse en las caras (figura 11 a) y en el arreglo raíz (figura 11b), conservando su forma original. Sin embargo, ninguna de las dos formas definen patrones comunes con otros despliegues de los poliedros restantes. En el icosaedro, las aristas no definen celdas transversalmente al cuerpo, lo cual no permite desplegarlo por celdas transversales.

Las formas en que se desarrollan los despliegues son equivalentes a las ya explicadas en el caso del cubo y el tetraedro, con la particularidad de que el despliegue del arreglo raíz del icosaedro es hexagonal triangulado (figura 2a) y tabla 1), y una vez desplegado en 2 capas, se reduce de orden 6 a orden 5 (en correspondencia con el patrón de orden 5 de los vértices del icosaedro) para cerrarse en el espacio 3D (figura 11 b). Este patrón se repite hasta completar el sólido, según el patrón del icosaedro.

### Patrones comunes en el despliegue del icosaedro y su dual, el dodecaedro

En el caso del icosaedro y su dual, el dodecaedro, la construcción de toroides no arrojó patrones de interés.

### El patrón de 64

El patrón de 64 no se cumple para este caso, sin embargo, si se suman las 32 caras del icosaedro truncado a los correspondientes 32 vértices del dodecaedro aumentado, se obtendrá  $32+32 = 64$ . Aunque este proceder rompe con la estrategia seguida hasta aquí; es interesante destacar, que algo similar se cumple con el patrón de 64 en la tabla de Elementos Químicos, donde a excepción del primer período, los valores numéricos de todos los demás se repiten en pareja. Para finalizar con una pareja de  $32+32 = 64$ :

- 1er. período, 2 elementos.
- 2do. y 3er. período, 8 y 8 elementos, para un total de  $2 \times (8) = 16$ .

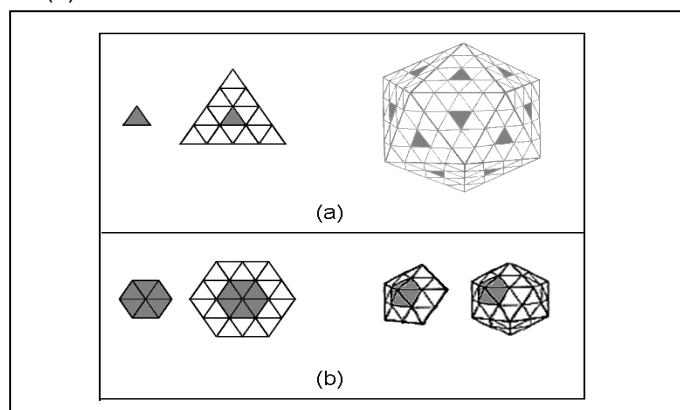


Fig. 11. Variantes posibles de despliegues con el icosaedro en las cuales conserva su forma original: a) Despliegue centrado en las caras; b) Despliegue centrado al arreglo raíz.



• 4to. y 5to. período, 18 y 18 elementos, para un total de  $2 \times (18) = 36$ .

• 6to. y 7mo. período, 32 y 32 elementos, para un total de  $2 \times (32) = 64$ .

#### El patrón 1, 3, 5, 7 de incremento centrado

Si se extiende el despliegue centrado del arreglo raíz hexagonal triangular en un decremento reticulado triangular (figura 12 a) y b), se obtiene un *incremento progresivo* a partir de un punto hasta la elongación máxima del despliegue. Esto genera un incremento triangular progresivo de 4 pisos de 1, 3, 5, 7 (figura 12 c) y d). En consonancia con este análisis de forma dual al arreglo raíz hexagonal simple, se obtienen los incrementos de los nodos en 1, 3, 5, 7 (figura 12 g) y h).

Aplicando este mismo procedimiento de incremento progresivo hasta la máxima elongación en el deltaedro de 60 caras se constatará el incremento 1, 3, 5, 7. Esto se ilustra en la figura 13 mediante el proceso de obtención del deltaedro de 60 caras a partir de la fusión de 2 tetraedros reticulados (similar al tetraedro reticulado obtenido en el tetraedro de la figura 7).

Cada tetraedro se encuentra rotando las caras de uno con relación a la aristas del otro. A cada arista de uno le corresponde el centro de cara del otro en el sitio de fusión. Esto define el patrón hexagonal del deltaedro de 60 caras (ver parte inferior de la figura 13). En las caras de los tetraedros fusionados se puede observar los incrementos triangulares de la serie 1, 3, 5, 7.

Los tetraedros (pirámides de base triangular) se fusionan por el incremento triangular final de 7 triángulos, conformando un "cintillo ecuatorial", que se orienta perpendicular al eje imaginario que cruza por los ápices de las pirámides fusionadas, los cuales corresponden a vértices de orden 6 del deltaedro de 60 caras (parte inferior de la figura 13).

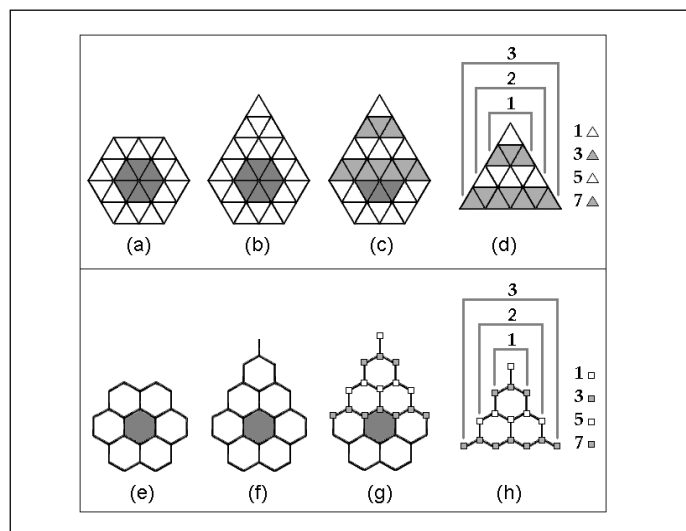


Fig. 12. Incrementos progresivos desde un punto hasta los arreglos raíz desplegados y la serie 1, 3, 5, 7. En la parte superior con el arreglo raíz hexagonal triangular y en la parte inferior con el arreglo raíz hexagonal simple.

En la parte baja de la figura 13, se tiene una vista superior de la fusión de las dos pirámides, y a su derecha, el deltaedro de 60 caras obtenido a partir del truncamiento de los ápices de las pirámides fusionadas.

En la parte superior de la figura 14 se observan los incrementos progresivos de los despliegues del icosaedro (figura 14 a) y el dodecaedro (figura 14 b), y en la parte inferior estos despliegues sin progresión.

#### El patrón de 20

Son 20 las caras hexagonales suficientes para definir al dodecaedro desplegado, las cuales corresponden con los 20 vértices de orden 6 en el icosaedro desplegado (en la estrategia dual y topológica dual) (figuras 9 y 10).

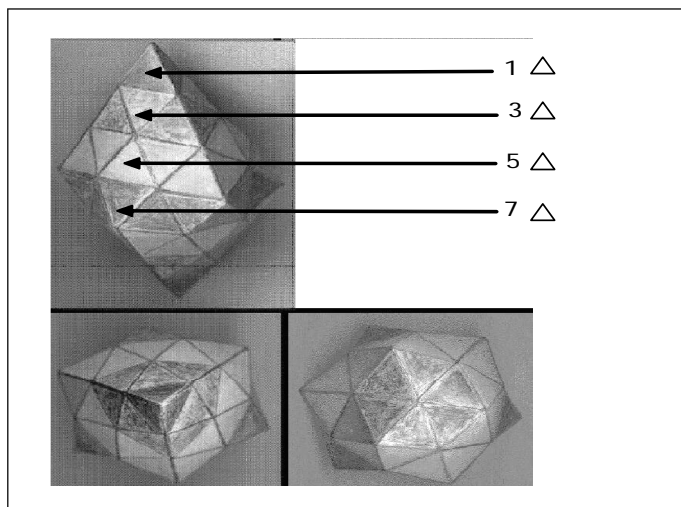


Fig. 13. Incremento progresivo aplicado al deltaedro de 60 caras y los "pisos" triangulares: 1, 3, 5, 7.

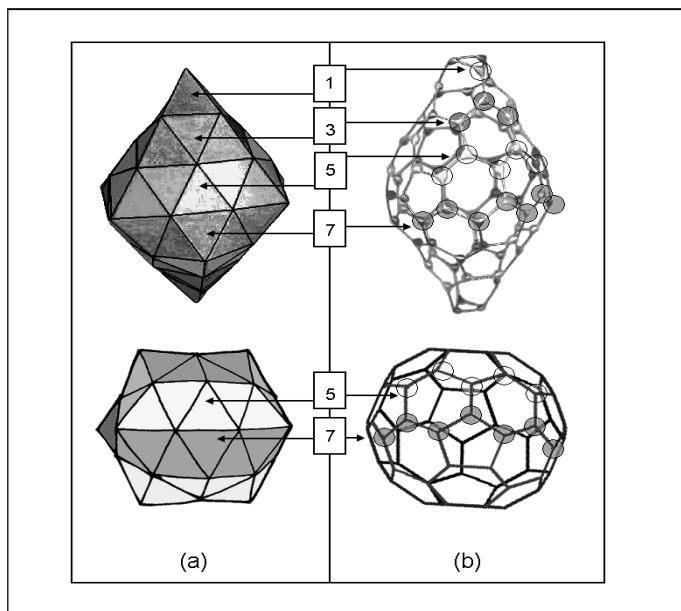


Fig. 14. Correspondencia topológica dual del incremento progresivo para los despliegues del icosaedro y el dodecaedro: a) Icosaedro desplegado (estrategia topológica dual) y su incremento progresivo; b) Dodecaedro desplegado y su incremento progresivo. Los números indican los incrementos triangulares a) y de nodos b).

### El patrón de 60

Son 60 caras triangulares del icosaedro desplegado, que corresponden (de forma dual o topológica dual) a los 60 vértices de orden 3 en el dodecaedro desplegado (figuras 9 y 10). También se cumple en la cualidad que tienen el dodecaedro y el icosaedro de poder realizar 60 permutaciones o rotaciones sin repetir la misma posición.

### El patrón de 3

Este patrón es el inherente a los arreglos de vértices de orden 3 para el caso del dodecaedro y su despliegue, lo cual también se corresponde con los arreglos en 3 de las celdas triangulares del icosaedro y sus despliegues. Dicho patrón se cumple asimismo en las 3 parejas de incrementos progresivos a partir de un vértice (aplicado a los despliegues), que define al elemento unidad (1) y los grupos en valores de 3, 5 y 7 (figura 12 d, h) y figura 14), en triángulos (icosaedro desplegado) o en nodos (dodecaedro desplegado).

### El patrón de 12

El icosaedro y sus despliegues tienen 12 vértices de orden 5 que se corresponden de forma dual y topológica dual con las 12 caras pentagonales del dodecaedro y su despliegue.

### Caso particular del despliegue centrado en el octaedro

En un desarrollo reticular en el espacio, las celdas octaédricas se complementan con las celdas tetraédricas y viceversa. Es decir, que un arreglo reticular octaédrico genera espacios intersticiales de arreglos tetraédricos y lo contrario.

En el octaedro las aristas definen celdas triangulares en sus caras y simultáneamente celdas cuadradas en sus secciones transversales.

Por esto el octaedro, es el único poliedro regular que se puede desplegar de las tres formas: en las caras (figura 15 a), en las celdas transversalmente (figura 15 b), y en su arreglo raíz (figura 15 c). De estas 3 formas, la de celdas definidas transversalmente (figura 15 b) es la que define patrones comunes a otros despliegues de los poliedros platónicos (tabla 2).

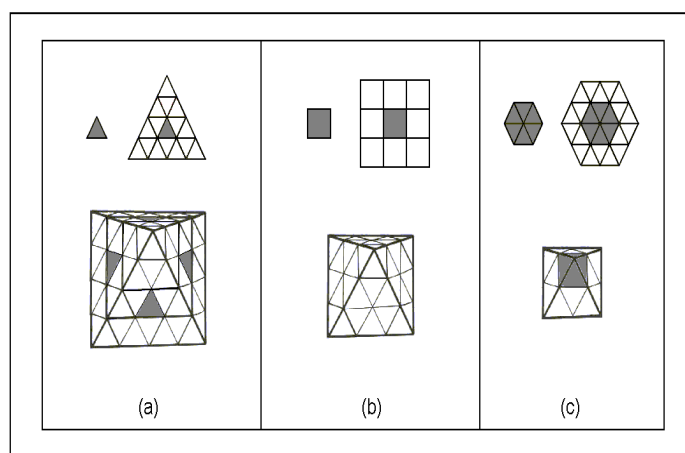


Fig. 15. Posibles despliegues en el octaedro: a) Despliegue centrado a las caras; b) Despliegue centrado a la celda transversal; c) Despliegue según su arreglo raíz hexagonal triangulado.

Para el despliegue centrado a partir de la celda transversal al cuerpo, la figura 15 b) muestra cómo a partir de una celda cuadrada transversal se realiza un crecimiento centrado en 2D. Tal como se realizó en el caso del cubo (figuras 3 a) y 16 e). Una vez obtenida la retícula regular cuadrada centrada, esta se extiende de forma regular octaédrica en el espacio para definir su expresión reticular (figura 15 b) y figura 16 d), siendo la retícula regular cuadrada, la base de las dos pirámides opuestas (bipirámide cuadrangular) que conforman a la retícula octaédrica.

Las formas en que se desarrollan los otros despliegues en el octaedro (figuras 15 a) y 15 c) son equivalentes a las explicadas en los poliedros ya analizados, con la particularidad de que el arreglo raíz del octaedro es el hexagonal triangulado (figura 2 a) y tabla 1).

Una vez desplegado en 2 capas, se produce una reducción de orden 6 a orden 4, en correspondencia con el patrón de orden 4 de los vértices del octaedro, para cerrarse en una retícula octaédrica en el espacio 3D (figura 15 c).

### Patrones comunes en el despliegue del octaedro

#### El patrón de 64

En la retícula octaédrica, las celdas octaédricas no llenan el espacio como en el cubo, sino que se complementan con celdas tetraédricas, por ello, al penetrar al interior para construir un toroide, solo se tiene en cuenta su superficie externa como una superficie cerrada vacía en su interior (análisis topológico) (figura 16 a) y b).

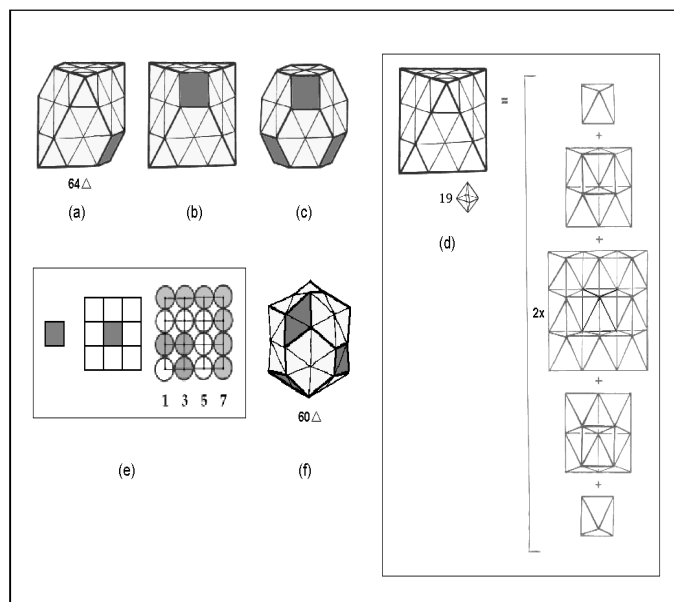


Fig. 16. Patrones del despliegue centrado del octaedro, a partir de la celda transversal al cuerpo: a) y b) Toroide obtenido a partir del octaedro desplegado orientado en dos posiciones; c) Octaedro desplegado con todos sus vértices truncados; d) Desglose de los pisos estructurales de la retícula octaédrica desplegada, con la cantidad de celdas octaédricas en su interior; e) Incrementos 1, 3, 5, 7 al realizar el despliegue centrado de la celda cuadrada transversal al cuerpo; f) Transformación del octaedro desplegado (con sus vértices truncados) al deltaedro de 60 caras.

De esta forma, se puede traspasar su interior truncando dos vértices opuestos (con lo cual se eliminan 4 celdas triangulares por vértices). Al suprimir las 8 celdas triangulares que conforman a 2 de sus vértices, se tiene que, de 72 celdas triangulares totales, quedan  $72 - (2 \times 4) = 64$  celdas triangulares finales (figura 16a) y b).

#### El patrón 1, 3, 5, 7 de incremento centrado

Se caracteriza por los incrementos centrados en los nodos de los planos transversales cuadrados del octaedro desplegado, a partir de un vértice en dirección diagonal. Esto define la serie de incrementos cuadráticos: 1, 3, 5, 7 (figura 16 e).

#### El patrón de 20

En este caso de la retícula octaédrica, no son 20 sino 19 octaedros, los que (como en los otros ejemplos) son suficientes para definir la retícula (figura 16 d). Esta celda octaédrica con 19 octaedros llena el espacio complementándose con 32 tetraedros. En este caso, 19 es un 95 % de 20, es decir, que se tiene un 5 % de error con respecto a los otros ejemplos (figura 16d).

#### El patrón de 60

Este octaedro desplegado, es una de las vías para la obtención del deltaedro de 60 caras ya visto en el despliegue del icosaedro (figura 17c). Esto se realiza truncando de manera simultánea los 6 vértices de la retícula octaédrica, según se muestra las figuras 16 c), f) y figura 17. Resulta así un octaedro truncado de 8 caras hexagonales trianguladas ( $8 \times 6 = 48$  celdas triangulares) y 6 cuadrados resultantes de los 6 vértices truncados de orden 4. Mediante un análisis topológico (como superficie vacía en su interior), se puede deformar los ángulos de las 6 caras cuadradas, de  $90^\circ$  a  $60^\circ$  y  $120^\circ$  respectivamente, según la figura 17c). Ello permite que cada cuadrado sea transformado en un par de triángulos equiláteros contrapuestos, resultando  $6 \times 2 = 12$  celdas triangulares nuevas ( $48$  celdas triangulares +  $12$  nuevas =  $60$ ). De tal modo se transforma la retícula octaédrica, en el deltaedro de 60 caras (figura 9b).

#### El patrón de 3

Este patrón es el que caracteriza a los arreglos en 3 de las celdas triangulares que se definen en las caras del

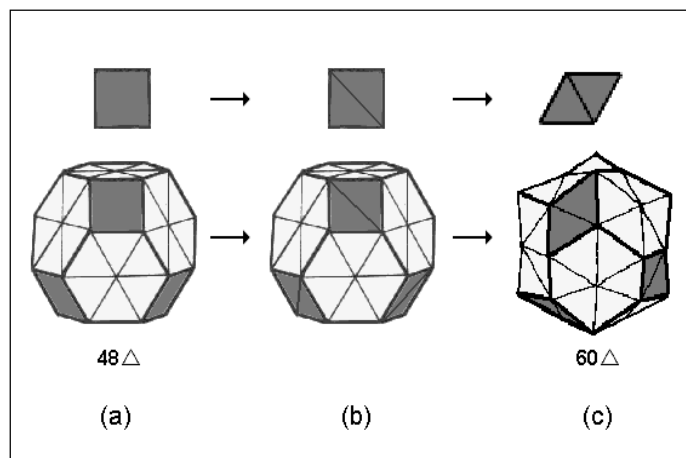


Fig. 17. Transformación en la que se puede observar el patrón de 60 para el caso del despliegue del octaedro y su relación con el deltaedro de 60 caras del despliegue del icosaedro.

octaedro y sus despliegues. Se cumple también en el incremento en 3 parejas de nodos centrados al vértice como elemento unidad (en el plano de las retículas cuadradas transversales, como en la figura 16 e), que definen a los grupos en valores de 3, 5 y 7 (figura 5b).

#### El patrón de 12

El octaedro tiene 12 aristas, al igual que la retícula octaédrica producto de su despliegue en las celdas transversales.

### CUMPLIMIENTO DE LOS PATRONES NUMÉRICOS EN DISTINTOS ESCENARIOS DE ALTAS RESTRICCIONES

A continuación se demuestra cómo se manifiestan regularidades numéricas similares a las de los despliegues de los poliedros platónicos antes explicados, en escenarios de altas restricciones como la *Tabla Periódica de los Elementos Químicos*, el *Sistema de Notas y Escala Musical Temperada* y el *Código Genético Universal*, lo cual abre un amplio campo para estudios posteriores.

#### El caso de la Tabla Periódica de los Elementos Químicos

##### El patrón de 64

64 es la elongación máxima a la que se extiende la suma de los 2 últimos (y mayores) períodos de 32 elementos cada uno ( $32 \times 2 = 64$ ). En la tabla 4 se muestran los orbitales que componen cada período, en consonancia con la cantidad de elementos que llegan alcanzar, según la capacidad de electrones de dichos orbitales. Los cuatro tipos de períodos que se definen, según la cantidad de elementos que lo componen son de 2, 8, 18 y 32. Menos el primero, todos los demás se repiten dos veces, de aquí que la cantidad de elementos agrupados por cada tipo de período es: 2, 16, 36 y 64 ( $2, 2 \times 8, 2 \times 18$  y  $2 \times 32$ ).

El patrón de  $32 \times 2 = 64$  del llenado de los dos últimos períodos 6 y 7 (tabla 4 y figura 18 b), también se cumple en el llenado de los orbitales según los niveles de energía (tabla 5 y figura 18 a). Los niveles energéticos que más se llenan con electrones ( $e^-$ ) son el nivel 4 y el nivel 5, con 32 electrones cada uno  $32 \times 2 = 64$ .

Las tablas 4 y 5 y la figura 18 se realizaron para la tabla periódica de 18 columnas (figura 19) completada hasta su última casilla del elemento 118.

##### El patrón 1, 3, 5, 7 de incremento centrado

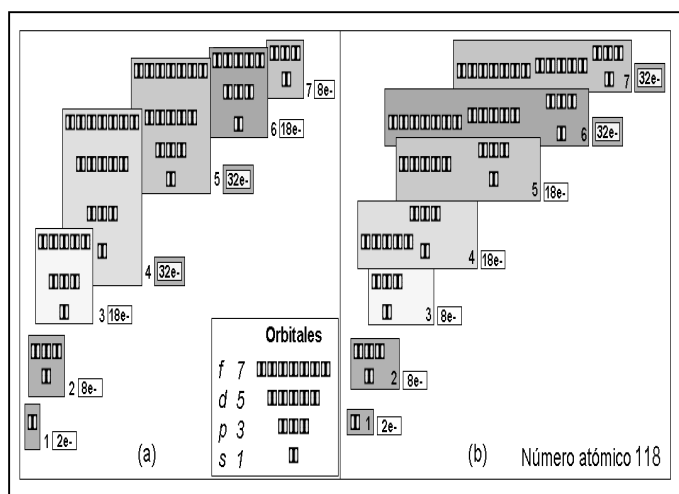
La extensión de la *Tabla Periódica de los Elementos Químicos* se conforma mediante el principio de Pauli de los distintos estados en que se puede encontrar el electrón sometido a altas restricciones por estar localizado en el átomo. Estos estados se obtienen matemáticamente por ciertas reglas, consistentes en determinadas combinaciones de los llamados números cuánticos  $n$ ,  $l$  y  $m$  ( $ml$  y  $ms$ ). Dichas reglas fueron deducidas por el desdoblamiento de las rayas del espectro, en subniveles equidistantes (centrados), del efecto Zeeman, que reflejan la naturaleza del movimiento del electrón, lo cual es en una primera aproximación, un campo coulombiano centrado al núcleo.

Tabla 4 Llenado de los orbitales por los períodos que se definen en la Tabla Periódica, agrupados en 4 tipos según la cantidad de elementos que los componen: 2, 8, 18, 32					
Períodos	Llenado de los orbitales por períodos	Número de orbitales por períodos	Número de elementos por períodos	Número total de elementos por tipos de períodos	Tipos de períodos según el número de elementos
1	$1s^2$	1	2	2	1
2	$2s^2, 2p^6$	$1+3=4$	8	16	2
3	$3s^2, 3p^6$	$1+3=4$	8		
4	$4s^2, 3d^{10}, 4p^6$	$1+5+3=9$	18	36	3
5	$5s^2, 4d^{10}, 5p^6$	$1+5+3=9$	18		
6	$6s^2, 4f^{14}, d^{10}, 6p^6$	$1+7+5+3=16$	32	64	4
7	$7s^2, 5f^{14}, 6d^{10}, 7p^6$	$1+7+5+3=16$	32		

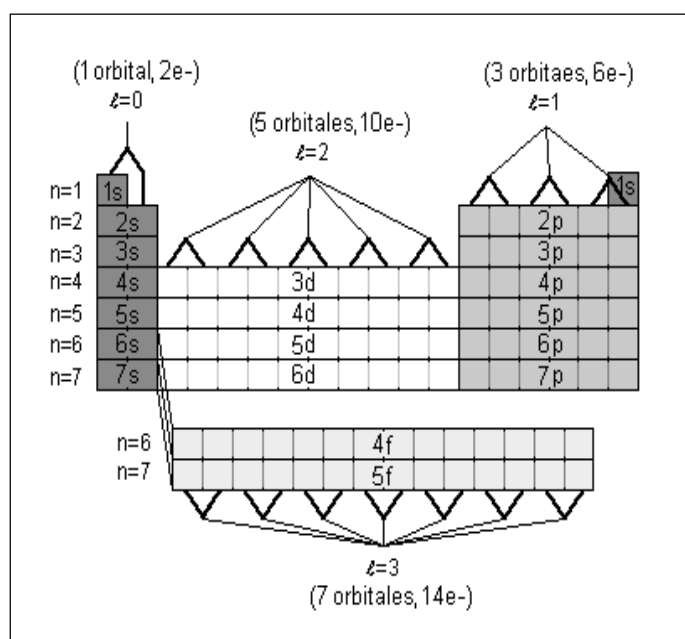
Tabla 5 Llenado de los orbitales según los niveles de energía que se definen en la Tabla Periódica, agrupados en 4 tipos según la cantidad de electrones que los componen: $2e^-$ , $8e^-$ , $18e^-$ , $32e^-$					
Niveles de energía	Llenado de los orbitales por niveles de energía	Número de orbitales por niveles de energía	Número de $e^-$ por niveles de energía	Número total de $e^-$ por tipos de niveles de energía	Tipos de niveles de energía según el número de $e^-$
1	$1s^2$	1	2	2	1
2	$2s^2, 2p^6$	$1+3=4$	8	16	2
7	$7s^2, 7p^6$	$1+3=4$	8		
3	$3s^2, 3p^6, 3d^{10}$	$1+3+5=9$	18	36	3
6	$6s^2, 6p^6, 6d^{10}$	$1+3+5=9$	18		
4	$4s^2, 4p^6, 4d^{10}, 4f^{14}$	$1+3+5+7=16$	32	64	4
5	$5s^2, 5p^6, 5d^{10}, 5f^{14}$	$1+3+5+7=16$	32		

Los estados estacionarios o modos de vibración del electrón (correspondientes a sus niveles energéticos cuantizados), definen la serie de valores enteros del número cuántico principal  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Estos estados estacionarios de vibración se encuentran determinados por las altas restricciones a que está sometido el electrón en el átomo. Más adelante se constatará que esta serie es muy similar a la serie armónica de la cuerda vibrante fija en ambos extremos en el campo de la música. Lo común en estos dos fenómenos (la cuerda vibrante y el electrón en el átomo) es que son eventos ondulatorios estacionarios por estar limitados a altas restricciones físicas, lo cual determina su carácter discreto y armónico.

De acuerdo con la experiencia no tiene sentido en la práctica trabajar con valores de  $l$  superiores a 3, lo cual corresponde a los subniveles o estados degenerados de los electrones en cuatro tipos de orbitales  $s, p, d$ , y  $f$  (tabla 6 y figura 18). Estos cuatro tipos de orbitales en las cantidades de 1, 3, 5 y 7, definen las cuatro secciones o bloques de la tabla Periódica de 18 columnas completada hasta el elemento 118 (figura 19).



**Fig. 18. Distribución electrónica del elemento 118 de la Tabla Periódica. Los espacios dentro de los contornos sombreados muestran: a) El llenado de los orbitales según los niveles energéticos, desde  $n = 1$  hasta  $n = 7$ ; b) El llenado de los orbitales según los períodos, del 1ro. al 7mo.**



**Fig. 19. Los 4 bloques que se definen en la Tabla Periódica correspondientes a los 4 tipos de orbitales s, p, d y f, según los valores del número cuántico  $l$  desde 0 hasta 3.**

### El patrón de 20

Según las posiciones con respecto a los bloques en la Tabla Periódica se obtienen 20 formas de llenado de los orbitales:  $7s + 1s + 6p + 4d + 2f = 20$  (figura 19 y tabla 7).

### El patrón de 60

En la tabla 4 se muestran los 4 tipos de períodos de acuerdo con el número de elementos. La suma de estos cuatro tipos de períodos es 60:

$$2+8+18+32 = 60$$

La figura 20 es un esquema que ilustra cómo se definen las cantidades de estos cuatro tipos de períodos según van aumentando los orbitales en 3, 5 y 7 en un desarrollo centrado

### El patrón de 3

Como se ha expresado con anterioridad, no tiene sentido práctico trabajar con valores de  $l$  superiores a 3. Esto define un incremento en 3 parejas centradas ( $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ ), a partir del elemento unidad 0 del número cuántico  $m$ , que define a los grupos en valores de 3, 5 y 7 (tabla 6). También se cumple en la cantidad de elementos básicos del átomo (3): el protón, el neutrón y el electrón.

Tabla 6

Tipos y cantidades de orbitales 1, 3, 5 y 7 (con sus respectivos  $e^-$ ) por subnivel de energía, y su correspondencia con los números cuánticos  $l$  y  $m$ , hasta el valor de  $l=3$

Tipos de orbitales	Cantidad de orbitales	Cantidad de electrones	$l$	$m$
s	1	2	0	0
p	3	6	1	-1, 0, +1
d	5	10	2	-2, -1, 0, +1, +2
f	7	14	3	+3, -2, -1, 0, +1, +2, +3

Tabla 7

Cantidad total de 20 orbitales en la Tabla Periódica según su forma de llenado

Formas de llenado de los orbitales	Orbitales	Cantidad	Totales
s: iniciales	$1s, 2s, 3s, 4s, 5s, 6s, 7s$	7	20
s: final	$1s$	1	
p: finales	$2p, 3p, 4p, 5p, 6p, 7p$	6	
d: intermedios	$3d, 4d, 5d, 6d$	4	
f: intermedios	$4f, 5f$	2	

## El patrón de 12

Son 12 las orientaciones posibles del momento orbital, de la cantidad de movimiento del electrón para  $l = 3$  (valor suficiente para definir toda la Tabla Periódica) en un campo magnético externo (figura 21).

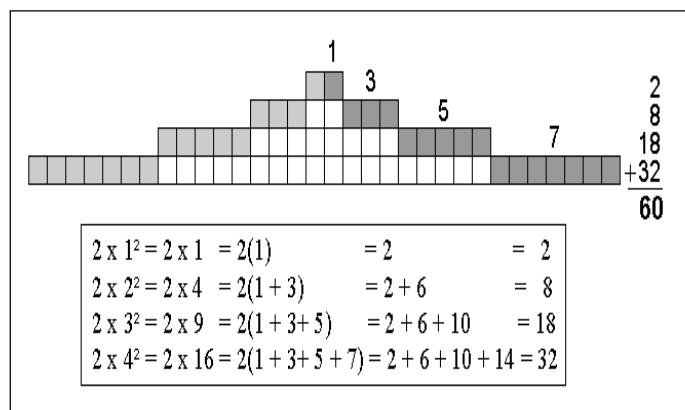


Fig. 20. Suma de los 4 períodos tipos (2+8+18+32 = 60) según los incrementos de los orbitales en 1, 3, 5, 7 de forma centrada.

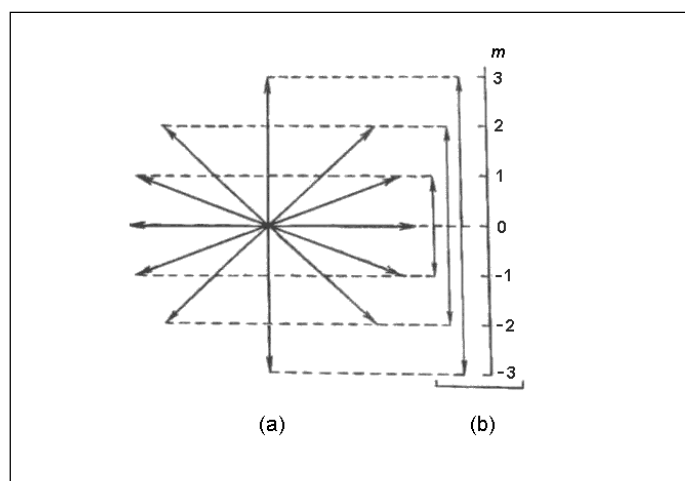


Fig. 21. Las 12 orientaciones posibles del momento orbital de la cantidad de movimiento del  $e^-$  para  $l=3$  en un campo magnético externo: a) Valores de la proyección del momento orbital sobre la dirección de un campo magnético exterior; b) Valores del número cuántico magnético  $m$  para  $l=3$ , que definen a 3 parejas ( $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$ , tabla 6) de incrementos centrados, al elemento unidad 0.

## El caso del Sistema de Notas y Escala Musical Temperada

### El patrón de 64

En el ámbito de la música, una figura (también llamada *nota*) es un signo que representa gráficamente la duración de un sonido musical determinado. Las figuras más utilizadas o básicas son 7: *redonda*, *blanca*, *negra*, *corchea*, *semicorchea*, *fusa* y *semifusa*. La figura simple que representa la unidad de duración (tiempo) es la redonda. Cada valor simple equivale a dos de su figura inmediata, así: una redonda equivale a dos blancas; una blanca a dos negras; una negra a dos corcheas; una corchea a dos semicorcheas; una semicorchea a dos fusas y una fusa a dos semifusas.

Estas duraciones de sonido básicas definen 7 potencias de 2, lo que hace que la unidad mayor que es la redonda dure 64 veces el tiempo de la séptima que es la semifusa (tabla 8).

En la variación de frecuencias en las 7 octavas básicas del teclado musical (como modelo de la distribución de las notas musicales dentro del espectro sonoro) acontece algo similar a lo que se observa en las figuras básicas de la música. Esto es, cada octava tiene el doble de frecuencia de su anterior. Al ser 7 octavas, la frecuencia de la última crece 64 veces con respecto a la primera, como se muestra en la última fila de la tabla 8 de los incrementos exponenciales en base a  $2^n$ .

Figuras	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea	Fusa	semifusa
Unidades de tiempo (UT)	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64
UT expresadas en base $2^n$	$1/2^0$	$1/2^1$	$1/2^2$	$1/2^3$	$1/2^4$	$1/2^5$	$1/2^6$
Incrementos exponenciales en base $2^n$	1	2	4	8	16	32	64

### El patrón 1, 3, 5, 7 de incremento centrado

En la música, la serie 1, 3, 5 es la que se encuentra en la conformación del acorde perfecto o triada, que es el acorde básico de la práctica común. El acorde perfecto es la sucesión natural de un grupo de tres sonidos simultáneos distintos. Por ejemplo, el conjunto formado por las notas *do*, *mi* y *sol*, donde *do* es la fundamental (primera), *mi* la tercera y *sol* la quinta, constituye al acorde perfecto mayor de *do* (tabla 9).

La variación elemental para producir un movimiento de un acorde perfecto dado a otro, es adicionando una séptima, lo cual completa la serie 1, 3, 5, 7 (en este ejemplo *si* es la 7ma. de *do*). Esta sucesión de notas es conocida como resonancia superior ya que su origen se encuentra en el fenómeno físico armónico. Este nombre se debe a que en una resonancia natural de una cuerda vibrante o columna de aire, estas son las notas, que suprimiendo las repetidas ( $f$  2,  $f$  4,  $f$  6, ver figura 22 y tabla 9), se generan en los 6 primeros armónicos sucesivos naturales (de una frecuencia dada,  $f$ ). Estos 6 primeros armónicos generan las notas del acorde perfecto (1ra, 3ra, 5ta) y con el séptimo la nota séptima *si* (1ra., 3ra., 5ta., 7ma.).

El sistema de onda estacionaria que caracteriza a la vibración libre de una cuerda entre dos apoyos rígidos (nodos fijos) o al aire en un tubo abierto por ambos lados, se descompone en sus distintos modos de vibración o estados estacionarios (discretos), dados por la frecuencia mínima, que se llama fundamental y las otras frecuencias que se denominan sobretonos. Los sobretonos cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia del tono fundamental, constituyen lo que se llama una serie armónica (1, 2, 3...). El hecho de que la cuerda vibrante esté fija (restricción) por

ambos extremos o el tubo de aire abierto (restricción) por ambos extremos, es la más alta restricción que se le puede aplicar al sistema de ondas presentes en estos objetos.

La serie 1, 3, 5, 7 también se puede encontrar en los arreglos simétricos a la octava central del teclado musical. Las 7 octavas se distribuyen en 3 parejas simétricas con respecto a la octava central. Estas parejas definen 3 pasos de incrementos hacia la derecha y decrementos hacia la izquierda de la frecuencia, con respecto a la octava central correspondiente a la nota *la* 440 Hz, según el estándar internacional (figura 23 y tabla 10).

Tabla 9 Sucesión natural de notas musicales en la conformación del acorde perfecto (figura 22)						
Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si
Primera f 1, 2, 4	Segunda	Tercera f 5	Cuarta	Quinta f 3,6	Sexta	Séptima

En cada octava se duplica la frecuencia de su anterior (como fue visto en la última fila de la tabla 8). Si se toma la relación de frecuencias entre las octavas con referencia a la octava central, se tienen tres incrementos exponenciales a la derecha y tres decrementos a la izquierda en base 2, quedando la serie de los exponentes -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, tal y como se ilustra en la tabla 10.

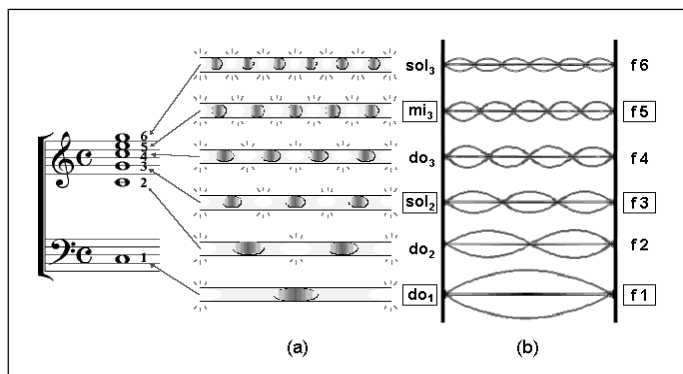


Fig. 22. Relación entre los sucesivos armónicos originados y las notas de un acorde perfecto de do mayor: a) En un tubo o columna de aire abierta por ambos lados; b) En una cuerda vibrante en sus extremos.

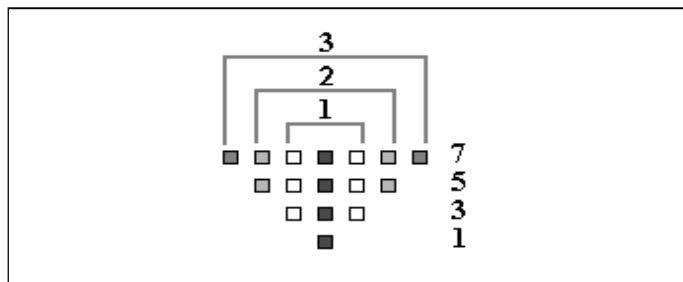


Fig. 23. Esquema que ilustra los grupos en valores de 3, 5, y 7 que se definen en un incremento de 3 parejas de elementos centradas a un elemento unidad (1) dado que, en el caso del teclado es la octava central, y las parejas son las octavas colaterales.

De esta forma se constata un patrón análogo a las relaciones centradas 1, 3, 5, 7 en el teclado del musical, y el valor de máxima elongación del número cuántico  $m$  (para  $l=3$ ), para el desarrollo de la *Tabla Periódica de los Elementos Químicos* (tabla 10).

#### El patrón de 20

El espectro musical dentro del diapason de frecuencia audible del oído humano es de 20 a 20 000 Hz. Este diapason se puede desglosar a partir de 20 Hz, en 3 incrementos exponenciales en base 10 que definen a 4 exponentes 0, 1, 2, 3. En la tabla 11 se muestra el desglose del espectro audible en base a 10, en comparación con el número cuántico  $l$  hasta 3, que es el valor de máxima elongación para el desarrollo de la *Tabla Periódica de los Elementos Químicos* (tabla 6).

#### El patrón de 60

Ya se expresó que la relación de frecuencias o intervalo entre las octavas extremas del teclado musical es 64, es decir, que al tomar cualquier nota de referencia en la última octava y dividirla por su correspondiente en la primera se tiene una relación de 64, por ejemplo, la relación entre el  $do_7$  (2 093,0 Hz) y  $do_1$  (32,703 Hz):

$$2\,093,000\text{ Hz}/32,703\text{ Hz} = 64,000\,2 \approx 64 \text{ (figura 24 a) y b)}$$

Ahora, si se mide el intervalo *interno* entre las octavas extremas, esto es, tomando a la nota que antecede a la de referencia en la última octava, por ejemplo, de  $do_7$  es  $si_6$  (1 975,5 Hz), y se divide por la correspondiente a la referenciada en la primera octava (que en este caso es la nota  $do_1$  de 32,703 Hz), se tiene una relación de:

$$1\,975,5\text{ Hz}/32,703\text{ Hz} = 60,407\,3 \approx 60 \text{ (figura 24a) y c)}$$

#### El patrón de 3

Se cumple este patrón en el incremento en 3 parejas de octavas simétricas a la octava central como elemento unidad, que define a los grupos en valores de 3, 5 y 7 con las octavas colaterales (figuras 23 y 24a). También se cumple en la estructura del acorde básico, conocido como *acorde perfecto*, que se conforma por 3 notas.

#### El patrón de 12

Se cumple en las 12 notas (teclas en el piano, ver figura 25) que componen a la octava musical, tradicionalmente conocidas por 7 naturales más 5 semitonos ( $7+5=12$ ):

- Las siete notas naturales: *do*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la* y *si*, conforman las siete teclas blancas, en una octava del teclado del piano.

- Los cinco semitonos que, en dependencia de la dirección que se tome "hacia delante" son sostenidos (#) y *hacia atrás*, son bemoles (b):  $do\#$  o *reb*,  $re\#$  o *mib*,  $fa\#$  o *solb*,  $sol\#$  o *lab* y  $la\#$  o *sib*, conforman las cinco teclas negras en una octava del teclado del piano.



Tabla 10

 Comparación del análisis centrado de las frecuencias de las octavas en el teclado del piano, expresadas a partir de la octava la central ( $2^3 = 8$ ), con el número cuántico magnético  $m$ , para  $\alpha = 3$ 

Representación de las frecuencias de las octavas del teclado musical, expresadas a partir de la octava la central ( $2^3 = 8$ )	1=8/ 8	2=8/4	4=8/2	8=8x 1	16=8x 2	32=8x4	64=8x8
Coeficientes que se definen, en la representación de la frecuencias de las octavas del teclado musical, expresada a partir de la octava la central ( $2^3=8$ ) en potencias de 2	$2^{-3} = 1/8$	$2^{-2} = 1/4$	$2^{-1} = 1/2$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
Exponentes de las potencias de 2 de las frecuencias de las octavas del teclado musical, expresadas a partir de la octava central ( $2^3 = 8$ )	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
Analogía con los 7 valores del número cuántico $m$ , para $l = 3$	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3

Tabla 11

 Rango de frecuencia audibles al oído humano en herz (Hz) en base a la potencia de 10 en correspondencia con el número cuántico  $l$ 

Rango de frecuencias del diapason audible humano, en incrementos de potencias de a 10	Exponentes en base 10	Número cuántico $l$
$20 \times 10^0 = 20\text{Hz}$	0	
$20 \times 10^1 = 200\text{Hz}$	1	
$20 \times 10^2 = 2\,000\text{Hz}$	2	
$20 \times 10^3 = 20\,000\text{Hz}$	3	

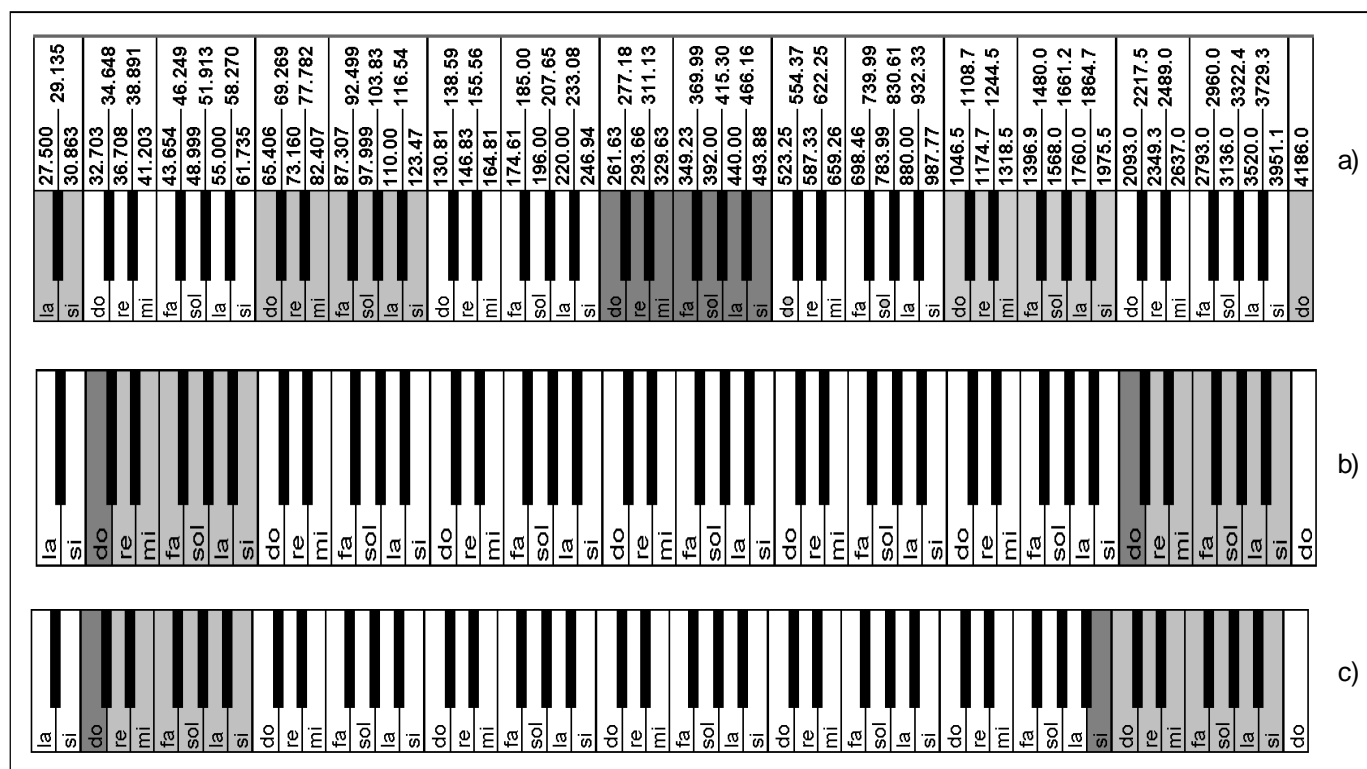


Fig. 24. Frecuencias del teclado musical según el estándar internacional para la nota *la* 440Hz: a) Las 7 octavas se han contrastado para mostrar su patrón centrado; b) Se han resaltado la primera y última octavas y en estas, las teclas que corresponden a las notas del  $do_1$  y el  $do_7$ ; c) Se han resaltado la primera y última octavas, y las teclas que corresponden a las notas del  $do_1$  y el  $si_6$ .

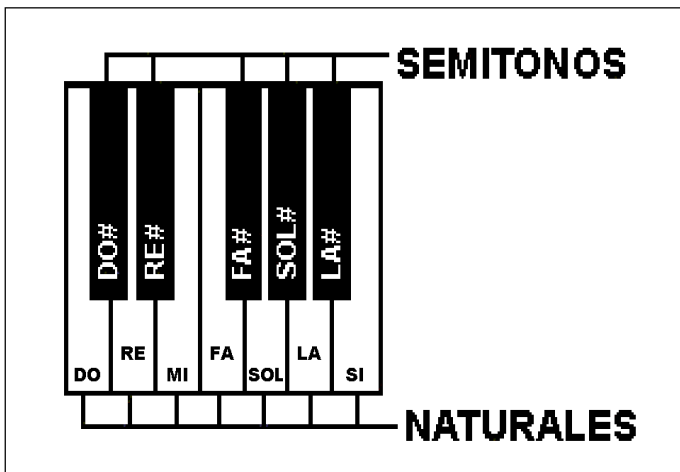


Fig. 25. Las 12 notas de la octava musical, que en el teclado del piano están conformadas por 7 teclas blancas, correspondientes a las notas naturales, y 5 teclas negras correspondientes a los 5 semitonos.

### El caso del Código Genético Universal

El *Código Genético Universal* es el código del *mecanismo molecular* de la información de la vida. Este *mecanismo molecular* es sumamente complejo y eficiente, lo cual ha permitido que la vida perdure hasta nuestros días. Una de sus cualidades para *sobrevivir en el tiempo* ante las mutaciones, son las *altas restricciones* que posee, como puede constatare en la representación geométrica de su espacio vectorial algebraico en 3D (figura 26).

La representación geométrica del espacio algebraico del *Código Genético Universal* [11,12] es una retícula cúbica de 64 nodos ( $4^3$ ), como la obtenida en el caso del despliegue centrado en las caras del cubo. En la degeneración del *Código Genético*, las 64 combinaciones de tripletes de codones codifican para 20 aminoácidos, y el inicio y final de lectura (tabla 12).

#### El patrón de 64

El 64 es la máxima capacidad de las combinatorias de 4 bases nitrogenadas, leídas en tripletes de codones de lectura ( $4^3 = 64$ ) (tabla 12 y figura 26).

#### El patrón 1, 3, 5, 7 de incremento centrado

Son los incrementos cuadráticos de los nodos en cada cara (a partir de un vértice), de la retícula cúbica que resulta de la representación geométrica del espacio algebraico del *Código Genético*.

#### El patrón de 20

Son solo 20 aminoácidos los que codifica el *Código Genético Universal*, producto de su degeneración a partir de los 64 codones (tabla 12).

#### El patrón de 60

Son 60 los tripletes de codones que codifican solo para aminoácidos y no participan en la iniciación o finalización de lectura (tabla 12). Los otros 4 codones restantes, participan en la iniciación y finalización de lectura -el codón de iniciación AUG, que también codifica para el aminoácido metionina (Met) y los 3 codones de fin de lectura UAA, UAG y UGA.

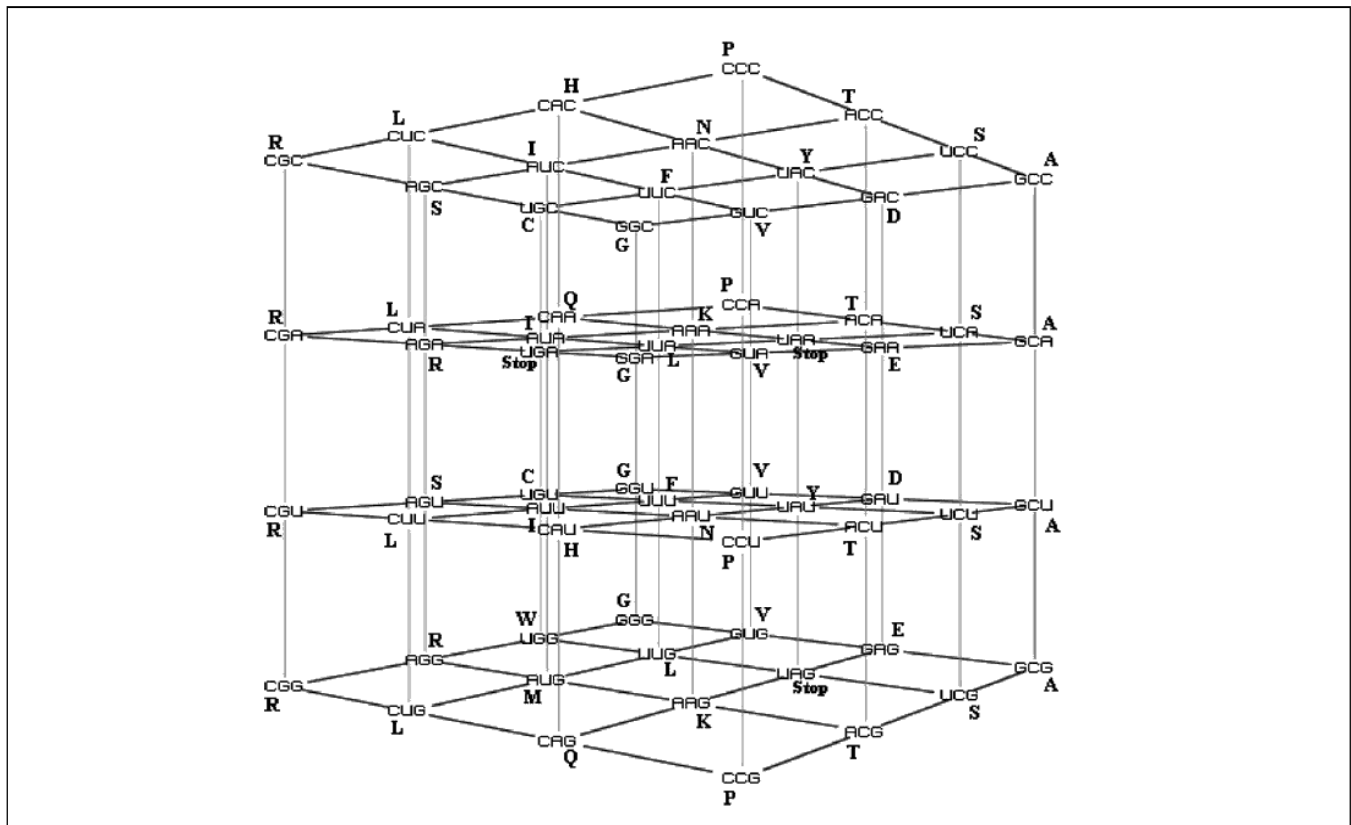


Fig. 26. Retícula cúbica de 64 nodos ( $4^3$ ), resultante de la representación geométrica del espacio algebraico en 3D del Código Genético Universal. [10]

		Segunda base del codón				
		U	C	A	G	
Primera base del codón	U	UUU } Phe UUC } UUA } Leu UUG }	UCU } Ser UCC } UCA } UCG }	UAU } Tyr UAC } UAA } Fin UAG }	UGU } Cys UGC } UGA } Fin UGG } Trp	U C A G
	C	CUU } CUC } CUA } CUG }	CCU } CCC } CCA } CCG }	CAU } His CAC } CAA } Gln CAG }	CGU } CGC } CGA } CGG }	U C A G
	A	AUA } AUG } Ini Met AAU } AUC }	ACA } ACG } ACU } ACC }	AAA } Lys AAG } AAU } Asn AAC }	AGA } AGG } AGU } Ser AGC }	U C A G
	G	GUU } GUC } GUA } GUG }	GCU } GCC } GCA } GCG }	GAU } Asp GAC } GAA } Glu GAG }	GGU } GGC } GGA } GGG }	U C A G
		Tercera base del codón				

**Tabla 12. Degeneración del Código Genético Universal.** De las 64 combinaciones de tripletes de codones, se definen 20 aminoácidos, 1 codón (AUG) de inicio (Ini) de lectura que también codifica para la metionina (Met, encerrado en un cuadro oscuro en la parte inferior) y 3 codones de fin de lectura (Fin, UAA, UAG y UGA encerrados en 2 cuadros oscuros en la parte superior).

### El patrón de 3

La retícula cúbica que resulta (de la representación geométrica del espacio algebraico del *Código Genético*), tiene en cada cara, el incremento en 3 parejas de nodos centrados al vértice como elemento unidad, que define a los grupos en valores de 3, 5 y 7 (figuras 23 y 26). También se cumple en el triplete del codón, como unidad de lectura del *Código Genético Universal*, que consiste en la combinación de 3 bases nitrogenadas (tabla 12 y figura 26).

### El patrón de 12

Son 12 las aristas de la retícula cúbica que resulta de la representación geométrica del espacio algebraico del *Código Genético* (figura 26).

## CONCLUSIONES

La investigación realizada permite afirmar que la *Tabla Periódica de los Elementos Químicos*, el *Sistema de Notas y Escala Musical Temperada* y el *Código Genético Universal*, tienen patrones matemáticos comunes por ser sistemas de altas restricciones. Los poliedros platónicos constituyen el escenario geométrico por excelencia que permite estudiar (experimentar y modelar) estas características asociadas a las altas restricciones.

La existencia de un fenómeno de resolución de orden matemático común en escenarios tan diferentes como los investigados, explica la presencia de un grupo de patrones cuantitativos comunes en ellos.

## REFERENCIAS

- CANINO RAMOS, C. E.; DÍAZ CABALLERO, J. R.** "Heurística de los poliedros regulares para la investigación". *Revista Cubana de Ingeniería*, 2012, vol. III, núm. 2, mayo - agosto, pp. 59 - 69. [ref. mayo 2012]. Disponible en Web: <http://rci.cujae.edu.cu/index.php/rci/article/view/68/pdf> [consultado en abril 2012].
- SUTTON, D.** *Sólidos platónicos y arquimedianos*. Barcelona: Editorial Oniro, 2005, ISBN 9788497541312.
- FOWLER, D. H.** *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*. 2nd. ed. England: Oxford University Press, Oxford, 1999. ISBN 978-0198502586.
- BORWEIN, J. M.; BAILEY, D. H.; GIRGENSOHN, R.** *Experimentation in Mathematics: Computational Paths to Discovery*. A K Peters/CRC Press, 2004. ISBN 978-1568811369.
- DÍAZ CABALLERO, J. R.** *Más allá del paradigma. Filosofía y creatividad*. La Habana: Editorial de Ciencias Sociales, 2012, p. 15. ISBN 978-959-06-1386-9.
- DOMENECH ROMÁ, J.** *Poliedros regulares: geometría descriptiva*. Madrid: Editorial Club Universitario, 2003, ISBN: 9788484542667.
- GONZÁLEZ URBANEJA, P. M.** "Los sólidos platónicos: historia de los poliedros regulares". En: Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. Real Sociedad Matemática Española. Disponible en Web: [http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com\\_content&view=article&id=3386:los-sos-platos-historia-de-los-poliedros-regulares&catid=38:temas-matemcos&Itemid=33](http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3386:los-sos-platos-historia-de-los-poliedros-regulares&catid=38:temas-matemcos&Itemid=33) [consultado enero 2012].
- ROBERT, W.** *The Geometrical Foundation of Natural Structure. A Source Book of Design*. Eds. Dover Publications, Inc. New York, 1978. Fig.6-19 (a), p. 220. ISBN 0-486-23729-X.
- BUCKMINSTER FULLER, R.** *Synergetics. Explorations in the Geometry of Thinking*. Macmillan Publishing Co. Inc. 1979. The Projects of Robert W. Gray. 2001. Disponible en Web: <http://www.rwgrayprojects.com/synergetics/s09/figs/f9001.html> [consultado en línea: enero 2012].
- SÁNCHEZ, R.; GRAU, R.** "The Ancestral Genetic Code Cube", Wolfram Demonstration Project.URL, 2009. Disponible en Web: <http://demonstrations.wolfram.com/TheAncestralGeneticCodeCube> [consultado en línea: febrero 2012].
- SÁNCHEZ, R.; GRAU, R.; MORGADO, E.** "A Novel Lie Algebra of the Genetic Code over the Galois Field of Four DNA Bases", *Mathematical Biosciences* 202, 2006, p. 160.
- SÁNCHEZ, R.; GRAU, R.** "An Algebraic Hypothesis about the Primeval Genetic code Architecture", *Mathematical Biosciences* 221, 2009, pp. 60-76.

## AUTORES

### **Carlos Alberto Canino Ramos**

Ingeniero Electrónico, Máster en Ciencias Técnicas de Electrónica de la Aviación, Especialista en Explotación Técnica de Equipos Radioelectrónicos, Instituto en Ciencia y Tecnología de los Materiales, Universidad de La Habana, Cuba

### **José Ricardo Díaz Caballero**

Licenciado en Filosofía, Doctor en Ciencias Filosóficas, Profesor Titular, Dirección de Ciencias Sociales, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, La Habana, Cuba

### **Genovevo Morejón Vizcaino**

Ingeniero Mecánico, Doctor en Ciencias Técnicas, Profesor Titular, Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería Mecánica, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, La Habana, Cuba

# Heuristics of the Platonic Polyhedra for the high Restrictions Reality Research

## **Abstract**

In the present work, are exposed concepts, principles and procedures that make up a theory for the heuristical geometrical interpretation of high restrictions reality, based on a thesis where the Platonic Polyhedra are carriers of a content with a high heuristic potential for the theoretical interpretation of reality, particularly the high restriction systems, for example the Periodic Table of Chemical Elements, the System of Notes and Tempered Musical Scales and the Universal Genetic Code.

Key words: heuristics, platonic polyhedra, geometry, harmony, symmetry, common patterns, high restrictions